分类号： O11　　　　学校代码： 10697

密　级： 公开　　　　学　　号： 200820816

西北大学
Northwest University

硕士学位论文
MASTER'S DISSERTATION

律学计算体系的比较研究

学科名称： 科学技术史（数学史）

作　　者： 刘娅娅　　　　指导老师： 曲安京 教授

西北大学学位评定委员会

二〇一一年

西北大学学位论文知识产权声明书

本人完全了解西北大学关于收集、保存、使用学位论文的规定。学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版。本人允许论文被查阅和借阅。本人授权西北大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。同时授权中国科学技术信息研究所等机构将本学位论文收录到《中国学位论文全文数据库》或其它相关数据库。

保密论文待解密后适用本声明。

学位论文作者签名：刘娅娅　指导教师签名：

2011年6月1日　　　　2011年6月2日

西北大学学位论文独创性声明

本人声明：所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，本论文不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得西北大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：刘娅娅

2011年6月1日

摘要

三分损益律、五度相生律、纯律和十二平均律是中西方律学史上占主导地位的几种律制。它们在不同文化、科技背景下产生，由于人类共有的听觉以及计数体系，共同反映了运用数学方法解释音乐声学的特性。对律学计算体系的比较研究为更好的认识人类社会不同文明下的律学发展规律提供了客观可行性。

有鉴于此，本文突破了以往运用现代音乐理论比较律制关系，将此对比限定在音乐史、律学史及音乐实践范围内的惯例。本文结合有关历史文献，对律学计算方法进行了一系列的考证：

1.依次介绍律学史上各主要律制的生律方法、音程计算基础、演变动力和过程；

2.统一了律制计算参数，逐步建立起律学计算的数学公式体系；

3.通过对这些计算公式的比较探寻它们之间的联系，将三分损益律的计算进行了统一化处理，使得统一后的三分损益律同十二平均律之间取得了联系，同时又介于十二平均律与纯律之间；

4.最后从数学物理方面对上述律制计算体系比较所得结论做出了解释。

统一公式化方法结合律学数理本质，达到了简化和深入律学计算研究的目的，使律制计算体系的比较研究成为现实，同时又探索出了一种更加合理的比较研究途径，为律学研究提供了新的工具。

关键词

律学，计算体系，比较研究

The comparable research of the calculating system of temperament

Abstract

The temperament generated by san-fen-sun-yi method and the fifth method, together with the pure temperament and twelve-tone equal temperament play an leading role in Chinese and Western temperament system. Although these temperaments are generated in different cultural and scientific background, they all reflect the same theory that is using the mathematics method to explain the nature musical acoustics because there is a same acoustics and generating system among different human beings. The comparable researches between different generating systems of temperament make it much possible to know the developing rules of temperament under different civilizations.

Above all, this paper aims to break the previous method, which uses the modern musical theory to make comparisons between different systems of generating temperament and this method restrict the comparisons within the music history, temperament history and music practice. This paper combines with some historical literatures to make a systematic reference work on the generating method of temperaments:

Introduce different systems of generating temperament, the basis of calculating pitch interval, the motivation and the process of evolution;

Consolidate the parameter of calculating the temperament, so as to build a mathematics formula of calculating;

According to the comparison of these calculation formulas, to explore some connections among these formulas. After consolidating the generating method of san-fen-sun-yi method, there are some connections between the new san-fen-sun-yi temperament and the twelve-tone equal temperament, meanwhile, the new san-fen-sun-yi temperament are within the boundary of the twelve-tone equal temperament and the pure temperament;

Finally, an explanation towards the conclusion of the comparisons of different calculation system of generating temperament is made through the aspects of mathematics and physics.

The method of consolidation of formula combines the mathematical and physical nature

of temperament, so as to simplify and deepen the aim of research of the calculation of temperaments and to make the comparison of the calculation of generating temperament come true. Meanwhile, the method of consolidation of formula helps to find a more reasonable comparable research method so as to provide a new tool for the research of the study of temperament.

Key words

study of temperament, calculating system, comparable research

目录

第一章　绪论 1
1.1 选题背景与意义 1
1.2 研究现状 3
1.3 研究内容与主要贡献 4
1.4 论文组织 5
第二章　三分损益律与五度相生律计算体系 6
2.1 三分损益律发现期 7
2.1.1 五声音阶的推算 8
2.1.2 半音音阶的推算 8
2.1.3 仲吕“极不生” 10
2.2 古希腊五度相生律的起源与经过 12
2.2.1 最早发现乐音协和的数字比与调和数列 12
2.2.2 五度相生法的确立 13
2.3 小结 13
第三章　纯律计算体系 15
3.1 纯律理论 15
3.2 纯律的应用 17
3.3 小结 20
第四章　十二平均律计算体系 21
4.1 探求新律时期 21
4.1.1 京房六十律与钱乐之、沈重三百六十律 21
4.1.2 何承天、刘焯和王朴定律法 23
4.1.3 对三分损益法不可返宫的证明 27
4.2 十二平均律理论 28
4.2.1 十二平均律的理论来源 29
4.2.2 十二平均律的计算程序 35
4.3 十二平均律的应用 38
第五章　三种律制计算体系的比较 40

5.1 三种律制的差异 40
5.2 三种律制的联系 41
结论 46
参考文献 47
攻读硕士学位期间取得的学术成果 50
致谢 51

第一章 绪论

1.1 选题背景与意义

自公元前5-6世纪以来，世界多个文明地区的数学家和音乐家都试图厘清音乐声音的本质，并运用数学方法来解决与音乐分析相关的理论问题，这使得音乐与数学之间呈现出一种密切的关联性。最早对乐音协和规律做出数理计算计量的努力构成了各个文明圈律学研究的雏形。律学从发声体的振动规律出发，利用数学计算来确定乐音的音高规律、音程关系等，曾一度被学术界称为绝学，它是由物理声学、数学计算和音乐理论互相渗透的一门交叉学科[1]。律学作为理论音乐学的一个重要分支学科，由于其与数学计算的重要关系，又称其为数理音乐学[2]。

中国古代律学，从来没有脱离过数学，而数学本身也因律学（与天文历法）计算的需要得到了充分发展。"数因律起，律以数成"[3]是数学与律学交互发展的真实写照。律学研究是一门古老的课题，它伴随着音乐演奏的尝试出现。我国远在奴隶社会的西周（公元前11世纪-前771年）时期，音乐就有了一定的发展，人们又从甲骨文和金文中，发现了大量乐器的名称，反应出当时人们生活的各个方面差不多都和音乐舞蹈发生着密切的联系。关于律学的文字记载最早见于我国诸多先秦文献之中："黄帝（公元前2650年）命伶伦截竹为十二律"、"律历同出于数"、"律历之数乃天地之道"等反映出律学理论作为各个朝代国家兴旺的象征[4]。《尚书•尧典》云："岁二月，舜东巡狩，至于岱宗，……同律度量衡。"就是说先统一各地之律，再以律来统一度量衡制度，律制体系严格控制着当时的政治经济制度。《舜典・益稷篇》："诗言志，歌永言，声依永，律和声……"[5]又表明在上古唐（尧）、虞（舜）时期，音乐不仅原本于律，并且建构在诗歌之上，也就是说有音乐的时候总有诗歌做伴[6]。

春秋战国时期，由于出现了更丰富的文字记载，音乐繁荣的情况大量的以文字形式保存了下来。诸子著作中记载了许多音乐故事，《周礼》、《仪礼》则记载了当时周密的音乐组织和音乐制度，以及音乐演奏的情况。不仅官方的音乐很发达，民间的音乐也体现出了空前的发达水平。例如，《战国策・齐策》在谈到当时的山东临淄时说到："甚富而实，其民无不吹竽、鼓瑟、击筑、弹琴"；《诗经》和《楚辞》中的诗歌在当时是和音乐联系在一起的，诗歌多要合乐，因此从音乐方面来看，《诗经》和《楚辞》也是古代音乐的总集[7]。此外，《管子・地员篇》、《墨子・非乐》、《荀子・乐论》、《礼记・乐记》、《吕氏春秋・音律篇》等篇中，更是收录专门探讨或者主要讨论音乐律制的文章。我国

历代正史，从《史记·律书》、《汉书·律历志》开始，大多都专门列有关于律学研究的篇章。这些一方面说明了我国古代律学研究的繁荣，另一方面也说明了律学在我国古代社会生活与政治生活中的重要地位。

与律学文献研究对应，随着近年来对大量出土乐器文物的研究，从实物证据上进一步证明了古代音乐的发达和繁荣。湖北随县出土的曾侯乙大墓，其乐器规模之大和完整，令人惊叹，但是曾侯乙只不过是春秋初年至战国时期，今湖北随州地区存在过的一个载籍未见的的一个小诸侯国—曾国国君[8]。不仅这样，曾侯乙钟铭保存了当时曾国和各国各种律名、阶名、变化音名之间的对照情况，这说明当时社会对律学已经有了相当的研究[9]。

在西方，律学研究起源于毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前 570 年-前 496 年）学派。他们将抽象的“数”作为万物的本原[10]，通过揭露“数”的奥秘来探索宇宙的永恒规律。他们对数做过深入研究并得到很多重要结果：数与乐音协和之间的关系；数与几何图形之间的关系；数与天体运行的关系等。毕达哥拉斯从乐音的高低规律和弦线长度比例关系中发现了自然界音响现象中隐藏的数的和谐，他通过对由观察经验体会到的协和音程的数字比来寻找解释世界的根据。对毕达哥拉斯的音乐理论，亚里士多德（Aristotle,公元前 384-前 322 年）在《形而上学》中说到：“根据毕达哥拉斯学派，天界整体结构是音阶（的和谐），是数”[11]。在古罗马时期，音乐思想与数学思想的一致性，在圣奥古斯汀的著作《音乐》中表达的最为明确。他把音乐界定为“美妙旋律之学”，这一定义促使他去观察乐音中数的规律性，尤其是观察音乐节奏和旋律进行中数的规律性，而这种进行又恰恰是被看作由数排列而成的一种运动[12]。在中世纪，主要探讨的是音体系的数学基础，这方面超越圣奥古斯汀成为古希腊罗马音乐学的代表人物就是写下五本《音乐基本原理》（500-507 年）的罗马人波伊提乌。

从古希腊毕达哥拉斯学派到现代的宇宙学家和计算机科学家，他们都或多或少受到“整个宇宙即是和声和数”的观念的影响，开普勒、笛卡尔、伽利略、欧拉、傅里叶、哈代等人，都潜心研究过音乐与数学的关系[13]。数学、几何和哲学相契携行，渗进西方人的全部精神生活，渗入到一切艺术领域而成为西方艺术的一大特色。圣奥古斯汀留下“数可以把世界转化为和我们心灵相通的音乐”的名言。德国数学家莱布尼茨（Gottfried Leibniz）则说：“音乐，是人类精神通过无意识计算而获得的愉悦享受。”而爱因斯坦说的更为风趣：“我们这个世界可以由音乐的音符组成，也可以由数学公式组成”。

纵观古今中外，律学史上占主导地位的基本律制有以下三种：一是中国古代的三分

损益律，西方对应盛行的五度相生律；二是纯律，也称为自然律；三是十二平均律。在律学发展史中，这三种律制出现的较早，而且有同时并用的情形[14]。三分损益律的理论，约出现于公元前7世纪左右，其实践应该更早；纯律的实践，可以确认是在公元6世纪左右；十二平均律大约在公元前2世纪开始实践运用，但其理论的完成却一直到17个世纪以后的1584年才出现。

几种律制之间存在差异又时常并用的情形大概可以由以下几点加以说明：1)人耳对音高的辨别能力，并不是十分精密；2)音差具有刺激作用；3)发音过准。参考这些情形就不难看出，在音乐实践的过程中，一方面要求音律的相当准确，另一方面又并不必达到纯而又纯，而是要求一定的音差存在。需要指出的是，这里所强调的问题并不是简单的准确与误差，而是一个相对复杂的辩证统一问题[15]。由此可知，由于人对乐音的感觉和音乐声音的数学物理原理等共性，律制的比较研究不应仅停留在对表面现象的归纳和整理，而是应该深入到生律方法、计算经过、变化动力等各个方面，从横向、纵向上涵盖律学发展变化的基本内容，因此从计算方法上对不同律制进行比较研究，可以说是一种构建在相同基础之上的理性分析的必然结果。

1.2 研究现状

比较律学的研究始于20世纪20年代，其先驱当推我国民族音乐学家王光祈先生。王光祈先生于1920年留学德国，期间接受比较音乐学学说并将其运用到东西乐制以及东方几个大民族乐制的比较研究中，见于其著作《中国音乐史》。此外，国内外其他学者相关著作和一系列学术论文，都展现了律学研究的生机和独特魅力，主要成果有：吴南薰、冯文慈等先生依据大量古籍对中外古今历代乐律的发展变迁做出了详尽的讨论；缪天瑞先生再三出版的《律学》一书长久以来作为律学研究必备的参考资料，从音乐理论的角度介绍了三种律制以及他们之间的区别和联系；戴念祖先生从声学史研究的角度，对中国古代的三种主要律制：三分损益律、纯律、十二平均律从物理构造原理、历史渊源以及与西方的比较等多个角度系统的介绍阐述，并收录在其中国物理史丛书的《中国声学史》卷中，该书亦作为目前音乐学院律学参考书目；程贞一先生的英文著作《Early Chinese Work in Natural Science》（《中国古代的自然科学成就》）中亦有章节介绍中国古代的声学成就，并深入介绍了三种律制在中国的发展情况以及具体规律[16]；李约瑟先生（Joseph Needham）的著作《Science and Civilisation in China》(《中国科学技术史》第四卷，第一分册物理学)中将律学纳入物理学范畴，并与西方律学的研究做出

了比较和探讨，但从数理计算角度对中国古代律学方面的研究篇幅有限。

至此，律学研究从文献研究、考古发掘、科技史特别是物理史上、音乐理论等多个角度进行了渗透。而且关于三种主要的传统律制研究可谓是取得了巨大成就，这些都对律学研究的发展指明了方向并给予了启发，使我们对律学研究的未来充满了希望和信心。但是，通过分析研究不难发现，上述研究在一定程度上存在一些局限性和不足之处：对律制的比较，没有一套从计算方法上进行比较研究的体系；对律制的相关数学计算没有给出足够的动力依据，混淆了律制创立与数学计算之间的关系。随着科学史和数学史的进一步发展，这个缺口越来越突出的显现出来，实践和理论都需求对律学计算体系进行更加深入的比较研究。

1.3 研究内容与主要贡献

本文在对律制之间错综复杂关系的比较过程中，首先认识到单纯从文献释译着手，结合现代音乐理论进行的比较不能充分揭示律学演变的内在规律[17]。只有从计算方法上进行比较研究才能更深入彻底的揭示不同律制之间的差异与联系。由于中国古代的数学家重视实际问题的解决，对律学的研究也主要是为了解决旋宫转调的终极目的，因此本文对律学计算体系的比较研究，以几种主要律制的演变发展规律为主线，重点剖析了古代中国的几种主要律制计算方法，并以西方相关律制计算为参照，在最大限度上维持了律学计算意图的真实性。

其次本文在结构上，依次介绍了各种律制的计算过程，提取推动律制计算的主要动力因素，挖掘相关音程计算（生律方法、生律要素、生律结果等）的数据进行分析，规范了各个参数的单位，统一选取黄钟律长的复杂问题，最后对传统计算方法进行公式化表述，并在公式化的基础上进行了统一化调整，制定出对应的比较模式。

再次，本文在探索律学的演变过程中，逐渐认识到其与数学之间的紧密关系，对一些既已存在的律学问题给出了数学解答。例如，对三分损益律不能返宫的证明；指出由于音乐内在的数学物理意义及其演绎的逻辑结构，对音乐数理方面的研究应进一步拓展。

最后，本文探索出了一种更加合理的律制比较研究途径：统一律制计算公式。据此创立的律学计算体系应包含：各律制演变的动力和过程；各律制的生律方法；各律制音程计算基础等。

1.4 论文组织

本文共分为五章，第一章为绪论部分，第二、三、四章分别论述三分损益律、纯律和十二平均律计算体系，第五章比较三种律制之间的差异和联系。另外，在各章结尾处做小结，以突出各个章节的重点并增强全文结构的连贯性、论述的清晰性。各分章内容介绍如下：

第二章，介绍中国古代三分损益律的创立过程，探索三分损益律的计算程序及生律动机；同时在计算基础及动机上与古希腊五度相生律进行了横向比较。

第三章，主要介绍了中外纯律在理论和应用方面的发展状况；依照纯律的生律规律给出了相应的计算程序。

第四章，首先介绍了探索新律的过程和结果，并通过详细计算证实了三分损益法“返宫”的不可能性；从理论来源和计算程序上讨论了朱载堉十二平均律的发明始末，并比较了中外十二平均律创立及发展的差异性。

第五章，总结全文，通过对三分损益律的改良，运用统一公式化方法，规范了三分损益律，纯律和十二平均律的计算程序及结果，最终建立起律学计算体系的比较模型，得出了比较结论。

最后对全文工作进行概括与总结，并对律学计算体系的比较研究前景及相应的研究方法进行展望。

第二章 三分损益律与五度相生律计算体系

在对几种律制的比较研究中都要涉及律学的一些相关知识，与其按章分述，不如辑成一节，在介绍三分损益律之前，先介绍一些关于律学计算的基础知识。

在远古时期，声学的大部分内容是与音乐学密切相关的。从数学上确定乐音的音高规律、音程关系和音阶结构，是古代声学的一个重要的分支学科，中国古代将其称之为“律学”[18]。“律”是构成律制的基本单位，当各律在音度上有了精密的规定，形成一种体系时，便称其为“律制”。在所有律学著作中，“律”字意义甚广，大致有：1）产生乐音的有关法则或规律，有生律法和律制的意思。不同的生律法对应不同的律制，如非等程律的“三分损益律”、自然律；等程律中的十二平均律，等等；2）表示与尺度有关的音高标准。历代律尺的长短有所不同，作为宫调中的起始音“黄钟律”的音高就随之发生变化；3）表示音高标准器，尤其是指律管；4）表示律音。比如典籍中提到的“高一律”或“低一律”即指高一个律音或第一个律音；5）狭义的律，也就是律吕中的“六律”。所谓“律吕”就是十二律。十二律的名称按音高顺序（有别于相生次序）依次为：黄钟、大吕、太簇、夹钟、姑洗、仲吕、蕤宾、林钟、夷则、南吕、无射、应钟。它们对应于今日的音名：C、$^{\#}C$、D、$^{\#}D$、E、F、$^{\#}F$、G、$^{\#}G$、A、$^{\#}A$、B、c。在中国历史上，没有单独出现过“音阶”一词，但却有明确的音阶的概念。五声音阶和七声音阶分别称为“五声”和“七声”。五声：宫、商、角、徵、羽。七声：宫、商、角、变徵、徵、羽、变宫。特别的，在七声音阶中，两个变声所在的位置不同，就会出现不同的音阶形式。中国古代音乐三种音阶形式：古音阶、新音阶以及俗乐音阶，以C为宫音时如下表所示：

表 1 古代三种音阶形式[1]

律名	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
音名	C	$^{\#}C$	D	$^{\#}D$	E	F	$^{\#}F$	G	$^{\#}G$	A	$^{\#}A$	B
音 古	宫		商		角		变徵	徵		羽		变宫
新	宫		商		角	变徵		徵		羽		变宫
阶 俗	宫		商		角	变徵		徵		羽	变宫	

附注 1：古：古音阶；新：新音阶；俗：俗乐音阶

音程是指两音之间的音高距离，它是以两个音的频率比来表示的。两端固定的弦线的振动频率：$f = c/\lambda$，其中，c为声速，λ为波长。两端固定的弦线振动波长为其弦长

的 2 倍。因此所谓的律学实验就是在弦线上进行弦长比（或频率比，弦长比与频率比成倒数关系）及确定音调高低关系的实验。在实际计算当中，依据频率比往往不能立即判断出两个音之间的音高距离究竟是多少，或谁大谁小。如 9/8 和 256/243，前者比后者究竟大多少，不作一番计算是难以立即做出比较的。但是，若依据埃利斯（Alexander Ellis,1814-1890 年）发明的音分值计算方法，将频率比换算为音分值，这样音程比较就变的一目了然[15]。将一个八度音程频率比 2/1，分为 1200 音分，在十二平均律中相当于每个半音为 100 音分。因此将任意频率比换算成音分值的方法为：设两个频率$f_2>f_1$，其频率比为f_2/f_1，并设其音分值为x_n，则由下式得：

$$\frac{1}{1200}\log\frac{2}{1}=\frac{1}{x_n}\log\frac{f_2}{f_1}$$

$$x_n=\frac{1200}{\log 2}\log f_2/f_1=3986.3137\log f_2/f_1$$

又因弦长与频率成倒数关系，若已知弦长为l_1，l_2，则有：

$$x_n=3986.3137\log l_1/l_2$$

2.1 三分损益律发现期

在现存文字记载中，中国古代最早提到“律”的是《虞书·舜典》篇，因收集在《尚书》中而流传下来：

“诗言志，歌永言，声依永，律和声，八音克谐……”（诗以词句来表达思想，歌以咏颂来唱出歌词，声用来便于咏，而律用来协调声……）另一处记载则说明了舜继承尧之后实施的重要政策：“同律度量衡。”（把音律、度量、衡制同准化。）

在殷周奴隶制时代，上层贵族早就有钟、磬、琴、瑟、笙、竽等相当高度的音乐及其他享受，高度化的享受为上层所垄断，低级者和奴隶不能平等的享受[7]。统治阶级必须像制定历法那样独自享有律制，以实现等级的划分和巩固。这种上层垄断的做法在一定程度上也推动了中国古代律学计算的发展。春秋（公元前 770-前 476 年）、战国（公元前 475-前 221 年）时期，中国社会由奴隶社会向封建社会过渡，社会经历了深刻的变革。诸子百家著书立说，各抒己见，互相批评，在学术文化上出现了“百家争鸣”的局面。大量关于音乐律学的资料在这个时期被保存下来：春秋管子所著《管子·地员篇》中记载的三分损益法是世界上有文字记载的、最早采用数学计算求律的方法；秦吕不韦主编的《吕氏春秋·季夏纪·音律篇》和汉刘安所著《淮南子·天文训》亦有关于三分

损益法的记载[19]。另外，自汉代《史记·律书》起，历代正史便将律和天文历法合称一科，单独设立《律历志》，律学也随之成为历代历史著作中必不可少的内容。

2.1.1 五声音阶的推算

古代中国人依据由感觉而发现（以耳齐声）的协和音程，深入具体地展开了对律学计算本身的研究，创制了一系列相关的理论和方法。五声音阶的推算是中国古代用数学方法计算音律的实例，它的记载最早见于《管子·地员篇》（公元前 480-前 422 年）中，原文如下：

“凡将起五音：先主一而三，四开以合九九。以是生黄钟小素之首，以成宫；三分而益之以一，为百有八，为徵；不无有三分去其乘，适足以是生商；有三分而复于其所，是以生羽；有三分而去其乘，是以生角。”①

据此用现代数学公式表示，五音算法为：

1×3=3

3×3×3×3=(3×3) ×(3×3)=9×9=81 ·········宫（3）

81×(1+1/3)=81×(2×2/3)=108····················徵（1）

108×(1-1/3)=108×2/3=72··························商（4）

72×(1+1/3) =72×(2×2/3)=96 ·····················羽（2）

96×(1-1/3)=96×2/3=64·····························角（5）

这些式子给出了五个音的弦长计算方法，即三分损益法。两个相生因子 2/3 和 4/3：乘 2/3，是三分损一；乘 2×2/3，是三分益一。由于两音之间的音程是以比率所定，以上《管子·地员篇》推算的数据，所表达的音阶，与起算律数 81 无关。之所以用 81 做起算律数，只在于避免出现非整数，简化计算。原文亦指明 81 是 3 的 4 次幂。整个计算过程中，4 次相除都除以 3，而 81 是能被 3 整除 4 次的最小整数[20]。

2.1.2 半音音阶的推算

最早用三分损益法对十二律做出完整计算的文字记载见于秦吕不韦在(公元前 249-前 237 年)主编的《吕氏春秋·季夏纪·音律篇》，原文如下：

“黄钟生林种，林钟生太簇，太簇生南吕，南吕生姑洗，姑洗生应钟，应钟生蕤宾，蕤宾生大吕，大吕生夷则，夷则生夹钟，夹钟生无射，无射生仲吕。三分所生，益之一分以上生；三分所生，去其一分以下生。黄钟、大吕、太簇、夹钟、姑洗、仲吕、蕤宾

① 《管子·地员篇》

为上，林钟、夷则、南吕、无射、应钟为下。”①

这段文字对十二律相生的计算，虽未载明律数（各律长度比例数），也未记出律长（各律真实长度），但明确给出了利用三分损益法计算十二律相对音高的方法。现据上文记述，将十二律相生次序列为表 2：

若据前面管子用三分损益法计算五声音阶，取黄钟律数 $3^4=81$ 得出五音之数的整数值。这里求十二个半音音阶，为避免非整数，亦用 $3^{11}=177147$ 来做黄钟律数[20]。按此将《音律》篇中关于十二律的相生过程计算如下：

$$3^{11}\times 1=177147\text{黄钟（上）}$$

$$3^{11}\times\frac{4}{3}=3^{10}\times 2^2=236196\text{林钟（下）}$$

$$3^{11}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=3^{11}\times\frac{2^3}{3^2}=3^9\times 2^3=157464\text{太簇（上）}$$

$$3^{11}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=3^{11}\times\frac{2^5}{3^3}=3^8\times 2^5=209952\text{南吕（下）}$$

$$3^{11}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=3^{11}\times\frac{2^6}{3^4}=3^7\times 2^6=139968\text{姑洗（上）}$$

$$3^{11}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=3^{11}\times\frac{2^8}{3^5}=3^6\times 2^8=186624\text{应钟（下）}$$

$$3^{11}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=3^{11}\times\frac{2^9}{3^6}=3^5\times 2^9=124416\text{蕤宾（上）}$$

$$3^{11}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=3^{11}\times\frac{2^{11}}{3^7}=3^4\times 2^{11}=165888\text{大吕（上）}$$

$$3^{11}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}=3^{11}\times\frac{2^{13}}{3^8}=3^3\times 2^{13}=221184\text{夷则（下）}$$

$$3^{11}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=3^{11}\times\frac{2^{14}}{3^9}=3^2\times 2^{14}=147456\text{夹钟（上）}$$

$$3^{11}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=3^{11}\times\frac{2^{16}}{3^{10}}=3^1\times 2^{16}=196608\text{无射（下）}$$

$$3^{11}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=3^{11}\times\frac{2^{17}}{3^{11}}=3^0\times 2^{17}=131072\text{仲吕（下）}$$

显然，这与上文中《管子·地员篇》记载的五声音阶取 $3^4=81$ 计算十分相似，也同样由上生和下生两个步骤组成。取 $3^{11}=177147$ 为黄钟律数依三分损益法生其余十一律时，通过上、下生次序连乘 11 次相生因子 2/3、4/3 后，由于分式的最大分母为 3^{11}，这样就能保证十二律各律数全取整数。177147 这个律数，被汉代及其之后的律学家所采用，又称其为“黄钟之实”。黄钟的振动体长度，古代习惯定为 9 寸，那么“黄钟之实”177147 即为律长 9 寸的 19683 倍。此外，《史记·律书》还有“生钟分”的概念和解释，即取黄钟律数为 1，按三份损益法而得其余的十一律的比例数[21]。据此，上式数据各项

① 《吕氏春秋·季夏纪·音律》

可列表3：

表2 三分损益十二律半音音程

次序	1 (1)	2 (8)	3 (3)	4 (10)	5 (5)	6 (12)	7 (7)	8 (2)	9 (9)	10 (4)	11 (11)	12 (6)
律名	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
音名	*C*	#*C*	*D*	#*D*	*E*	*F*	#*F*	*G*	#*G*	*A*	#*A*	*B*
邻律	114	90	114	90	114	90	90	114	90	114	90	

附注2：相邻律音程单位：音分

表3 三分损益律十二律各数据

次序	1 (1)	2 (8)	3 (3)	4 (10)	5 (5)	6 (12)	7 (7)	8 (2)	9 (9)	10 (4)	11 (11)	12 (6)
律名	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
音名	*C*	#*C*	*D*	#*D*	*E*	*F*	#*F*	*G*	#*G*	*A*	#*A*	*B*
律长	9	8.42	8	7.49	7.11	6.66	6.32	6	5.62	5.33	4.99	4.74
生钟分	1	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16384}{19683}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{131072}{177147}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4076}{6561}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{32768}{59049}$	$\frac{128}{243}$
音分	0	114	204	318	408	522	612	702	816	906	1020	1110
邻律	114	90	114	90	114	90	90	114	90	114	90	

附注3：邻律音程单位：音分

从上表可以看出运用三分损益法计算生成的十二律两律间的音程关系有两种：一是大半音2187/2048，114音分；一是小半音256/243，90音分。这表明《吕氏春秋》所载三分损益相生法，实质上就是《管子·地员篇》所载五声音阶推算法。事实上，三分损益法是一个一般性方法，能导生同一音阶的不同调式或不同长度的音阶。

2.1.3 仲吕“极不生”

在管子之后，汉刘安（公元前？-前122年）在《淮南子·卷三·天文训》中也提到了依三分损益法所生十二律：

“以三参物，三三如九，故黄钟之律九寸而宫音调。因而九之，九九八十一，故黄钟之数立焉。十二各以三成，故置一而‘一十一’三之，为积分十七万七千一百四十七，黄钟之大数立焉，凡十二律。黄钟为宫，太簇为商，姑洗为角，林钟为徵，南吕为羽。物以三成，音以五立，三与五如八；律之初生，写凤之鸣，故音以八生。黄钟为宫，

宫者，音之君也，故黄钟位子，其数八十一，主十一月，下生林钟；林钟五十四，主六月，上生太簇；太簇七十二，主正月，下生南吕；南吕四十八，上升姑洗；姑洗六十四，下生应钟；应钟四十二，主十月，上生蕤宾；蕤宾之数五十七，主五月，上生大吕；大吕之数七十六，下生夷则；夷则之数五十一，上生夹钟；夹钟之数六十八，下生无射；无射之数四十五，主九月，上生仲吕；仲吕之数六十，主四月，极不生。下生者倍以三除之，上生者四以三除之。一律而生五音，十二律而为六十音；因而六之，六六三十六，故三百六十音，以当一岁之日。”①

从“以三参物，三三如九……因而九之，九九八十一”，“十二各以三成，故置一而‘一十一’三之，为积分十七万七千一百四十七，黄钟之大数立焉，凡十二律。”想淮南子可能是从管子用黄钟律数，3^4=81，得出五音之数的整数值，所以用 3^{11}=177147 来做黄钟律数，以期在计算中能达到和管子之法一样的所有整数值。以 3^{11}=177147 为黄钟律数依三分损益法生其余十一律时，通过 11 次连乘相生因子 2/3、4/3 后，分式的最大分母为 3^{11}，这样十二律各律数就全是整数了。这个计算过程在《淮南子》中虽没有具体给出，但是前面《音律篇》中关于十二律的计算数据已经得到了验证。这与《淮南子》对黄钟律数的确立是不谋而合的。那为什么一定要引入“律数”概念，并要求所有的数值为整数？首先，弦线的实际长度应该是考虑到乐器的实际演奏之用，而律学计算在于探索更一般的规律，必须更易于掌握，律数的引用很好的解决了实践向理论转移的问题；其次，用三分损益法计算过程中不可避免的会出现复杂的分数（“生钟分”），从这些分数很难直接看出两律之间的大小关系。取黄钟律数 177147，相当于对所有的分式进行了一次通分，各律之间的大小比例关系就一目了然了，同时也提高了计算的精度。黄钟律数 177147 的引用大大方便了十二律律数的计算，也为十二律之间的比例关系提供了更直接的参照。

这里明确提到了“下生者倍以三除之”、“上生者四以三除之”，即两个相生因子：2/3，4/3。取黄钟音律长 9 寸，黄钟律数为 81，十二律的律数取整数而略去分数值。依其生律顺序，数学计算程序当如下[22]：

$$3^4 = 81(\text{黄钟})；\quad 81\times\frac{2}{3}=54(\text{林钟})；\quad 54\times\frac{4}{3}=72(\text{太簇})；$$

$$72\times\frac{2}{3}=48(\text{南吕})\quad 48\times\frac{4}{3}=64(\text{姑洗})；\quad 64\times\frac{2}{3}\approx 42(\text{应钟})；$$

①《淮南子·卷三·天文训》

$42 \times \frac{4}{3} \approx 57$（蕤宾）；　$57 \times \frac{4}{3} \approx 76$（大吕）　$76 \times \frac{2}{3} \approx 51$（夷则）；

$51 \times \frac{4}{3} \approx 68$（夹钟）；　$68 \times \frac{2}{3} \approx 45$（无射）；　$45 \times \frac{4}{3} \approx 60$（仲吕）；

这里仲吕“极不生”，其意指如果将仲吕向下生一次，得清黄钟数 60×2/3=40，照理，清黄钟与黄钟成八度倍半关系，应为 40.5；如将仲吕律再上生一次，得黄钟律数 60×4/3=80，也不能回到黄钟之数 81，计算结果出现了误差，即不能解决黄钟八度还原问题，按古人说法，这是为了“返宫”（从某一宫音起算，通过某种数学方法计算的结果又能回复到宫位）[2]。从汉代开始，许多律学家为此做了大量努力，它也成为推动中国历代律学发展的一个内在动因。中国古代创立的三分损益律是通过弦线上的测音实验确定各种音程，并表现这些音程内部联系和规律的一种数学方法。在人类探索自然现象的历史中，三分损益律是科学史上将自然现象总结为数学规律的最早、最成功的尝试[1]。

2.2 古希腊五度相生律的起源与经过

毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前 570-前 496 年）学派将抽象的“数”作为万物的本原。毕达哥拉斯学派的学习课程分为四大部分：1）数的绝对理论—算术；2）数的应用—音乐；3）静止的量—几何；4）运动的量—天文。合称为“四道”（quadrivium,或“四艺”)，后来又加上文法、修辞、逻辑合称为“七艺”。中国先秦时期，“养国子之道，乃教之以六艺。”（“六艺”：礼、乐、射、驭、书、数）堪与之媲美[23]。毕达哥拉斯学派通过揭露数的奥秘来探索宇宙的永恒规律，对数做过深入的研究并找到数与乐音协和之间的关系，他们认为世间的音乐只是对天界音乐的模仿，而天界音乐的和声是以数为基础的，所以音乐也是一种数的和谐关系[24]。

2.2.1 最早发现乐音协和的数字比与调和数列

毕达哥拉斯被认为是发现了彼此协和的声音的数字比。他发现如果两个紧张程度（张力）相同的弦，长度比为简单的整数比时，如 1/2，2/3，1 弹奏出来的就是和谐悦耳的乐音。这样乐音协和的问题被引入到他 “数是万物本原”的模型之中，在对这些简单整数比的进一步研究后，发现它们的倒数分别为 2，3/2，1 构成等差数列，而能够产生这种规律的数列被称为“调和数列”[25]。

根据“简单整数比”的原理，毕达哥拉斯学派创建了一套音乐理论。1，2，3，4 这头四个自然数，其和为 10，构成边为四点，每列分别为 1，2，3，4 点的三角形，称为四列十全(Tetraktys)[26]。按 4/3，3/2，2/1 的比构成几个主要的音调，这些音程关系是

古希腊音体系的基础，并被视为“永存的世界之原”。这样就可以用 6，8，9，12 这几个数字来再现四列十全[27]。张一根弦的弦音计把弦分成十二等分,分别拨动其中由 6，8，9，12 这几个数字构成的那段弦，就能使它奏出协和乐音。所以八度、五度、四度音程便以 2/1，3/2 和 4/3 的数字比例关系排列。七声音阶模式以不断分割四列十全音程为基础，在两个四度中，从上至下两次测出 9/8 这样的大二度：

$$(9/8)\times(9/8)\times(256/243)=4/3$$

算术分数的相乘与音程的组成相吻合，这一发现是早期精密科学的一大发现，它对音乐理论与数学间的交互关系影响产生了决定性的作用。

2.2.2 五度相生法的确立

音乐与数学的内在作用极大的影响了毕达哥拉斯和柏拉图(Plato，公元前 427-前 327 年)的音乐结构。毕达哥拉斯学派认定 3/2，4/3 与 2 为协和音程以后，取五度 3/2 定律，创制了五度相生法：

表 4　三分损益律与五度相生律比例数之比较[1]

音阶名	律名	古代中国	古希腊	音分值（cent）
C	黄钟	1	1	0
#*C*	大吕	2187/2048		
D	太簇	9/8	9/8	204
#*D*	夹钟	19683/16384		
E	姑洗	81/64	81/64	408
F	仲吕	177147/131072	4/3	
#*F*	蕤宾	729/512		
G	林钟	3/2	3/2	702
#*G*	夷则	6561/4096		
A	南吕	27/16	27/16	906
#*A*	无射	59049/32768		
B	应钟	243/128	243/128	1110
c	清黄钟	2/1	2/1	1200

从上表可以看出，古代中国三分损益律音阶与毕氏五度相生律音阶仅 *F* 值不同，再结合前面提到的中国古代五声音阶以及半音音阶的推算方法，可以看出：毕氏五度相生律音阶的音程值也只有两种：大全音 9/8，204 音分；小半音 256/243，90 音分。但由于五度相生律只有一个相生因子 2/3，因此只存在下生一个方向。

2.3 小结

本章通过对中国古代三分损益律与古希腊五度相生律计算起源的比较，得出了相似的结果。不同文明地区尽管存在文化、社会环境等各种差异，但由于律学在自然物理声

音和人类生理听觉上的共性而导致类似计算结果的路径可由图 1 来演示：

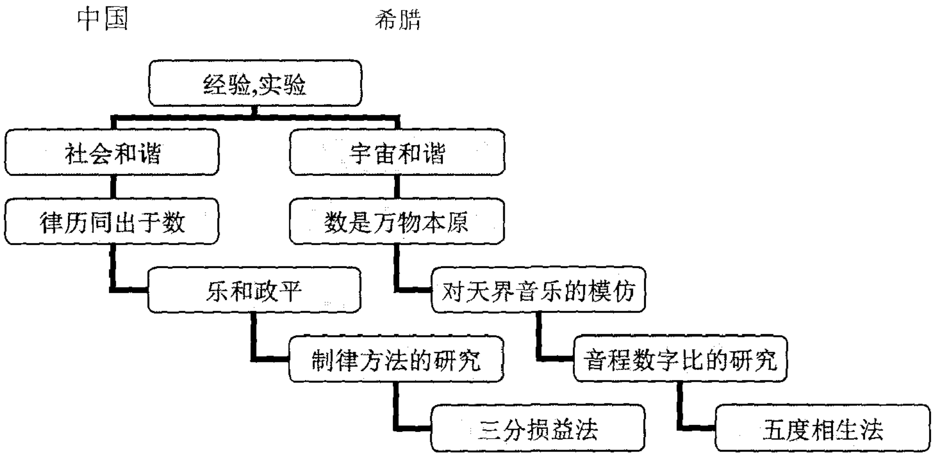


图 1　古代中国与古希腊乐律计算起源之路径比较

中国古代认为“律历之数乃天地之道”，音乐和制律是“乐和政平”的表现，沿着追求社会和谐的道路，创制了其特有的乐律计算方法，并不断完善与改进这种计算方法以契合音乐实践的需求；古希腊毕达哥拉斯学派依其“数是万物本原”的模式将音乐转化为数的关系，在追求宇宙和谐的道路上，通过更加深化的对数的关系的研究来揭示音乐声音的数理本质。不同文明的音体系各拥有不同的价值观，但是它们共同反映了数学和声学方面的“正确性”[28]。

第三章 纯律计算体系

纯律，因为根据自然法则（倍音原理）形成，所以又称为自然律，它和三分损益律一样都是不平均律。纯律在音乐史上是一个非常有控制性的律制，是由五度相生律再加入“纯律大三度”构成的。这种律制构成和弦时声音较为和谐，从和声学的角度来看，纯律确实比三分损益律更为和谐、纯正，所以称为纯律或纯正律。中国古代没有“纯律”一词，但是在音乐实践中，已经运用到了某些纯律音程。先秦钟律含大小三度，古琴是便于应用纯律的惟一的乐器，它的各个徽位泛音正是纯律音阶的音级。确定古琴徽位的折叠法以及明代朱载堉提出的计算方法，是最简单最高明的纯律计算方法[29]。由此可见，纯律在中国亦有非常悠久的历史。

3.1 纯律理论

在西方，十五、十六世纪之交，对位法盛行以后，作曲家把各种音程结合起来，却忽略了各音间的和音关系。首先发现这种关系的是意大利作曲家萨利诺（Zarlino, 1517-1590 年），他发现取弦长的 1/2，1/3，1/4，1/5，1/6 使其分次振动时，频率是基音的 2，3，4，5，6 倍，发出的分音有：

第二分音，在弦长的 1/2 位置；第三分音，在弦长的 1/3，2/3 位置；第四分音，在弦长的 1/4，3/4 位置；第五分音，在弦长的 1/5，2/5，3/5，4/5 位置；第六分音，在弦长的 1/6，5/6 位置。其中，第二、三、四分音是三分损益律的物理基础：第二分音为空弦振动的八度音；第三分音为空弦的五度音；第四分音为第 2 分音的八度音。第五、第六分音则组成了纯律的物理基础：第五分音与基音的频率比 5/4，5/3 构成纯律大三度和纯律大六度；第六分音与基音的频率比为 6/5，即纯律小三度[2]。在第二分音（八度）和第三分音（纯五度）之外，加入第五分音构成纯律大音阶；加入第六分音就可以构成纯律小音阶，又称自然小音阶，列表如下：

表 5 纯律大、小音阶与五度律大、小音阶的比较（算法与数值）

度数	音阶名	纯律大音阶算法	数值	五度律 C 大音阶	纯律小音阶算法	数值	五度律 a 小音阶
一	C	1	1	1	1	1	1
二	D	$\frac{(\frac{3}{2})^2}{2}$	9/8	9/8	$\frac{(\frac{3}{2})^2}{2}$	9/8	9/8
三	E	5/4	5/4	81/64	6/5	6/5	32/27

表 5（续）

度数	音阶名	纯律大音阶算法	数值	五度律 *C* 大音阶	纯律小音阶算法	数值	五度律 *a* 小音阶
四	*F*	$\frac{2}{3}\times 2$	4/3	4/3	$\frac{2}{3}\times 2$	4/3	4/3
五	*G*	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2
六	*A*	$\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}$	5/3	27/16	$\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}$	8/5	128/81
七	*B*	$\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}$	15/8	243/128	$\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}$	9/5	16/9
八	*c*	2/1	2/1	2/1	2/1	2/1	2/1

从上表知，纯律大、小音阶与五度律音阶的差别仅在 *E*、*A*、*B* 三个音级上，*C*、*D*、*F*、*G* 完全相同。*E*、*A*、*B* 这三个音，在五度相生律上都是由五度相生而得，而在纯律上则凭倍音原理，加入纯律大小三度而成。这说明，这两种律制上产生了同度数而不同高度的各音程，同时也导致了两种律制音阶构造的变化：

五度律 *C* 大音阶与纯律大音阶上的这三个音的差：

$$E:\frac{81}{64}(\text{五度律大三度})\div\frac{5}{4}(\text{大三度})=\frac{81}{80}$$

$$A:\frac{27}{16}(\text{五度律大六度})\div\frac{5}{3}(\text{大六度})=\frac{81}{80}$$

$$B:\frac{243}{128}(\text{五度律大七度})\div\frac{15}{8}(\text{大七度})=\frac{81}{80}$$

又有 $\log\frac{81}{80}\times\frac{1200}{\log 2}=22cent$（称为普通音差（common comma））。因此，纯律大音阶中的大三度、大六度和大七度都比相应的五度律小音阶音程低 22 音分，这跟纯律小音阶中小三度、小六度和小七度，高于五度律音程的情况恰恰相反。

再比较纯律大、小音阶的音程关系：

表 6 纯律大、小音阶与五度律音阶相邻音程的比较

度数	一	二	三	四	五	六	七	八
音阶名	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*A*	*B*	*c*
纯律大音阶相邻音程	9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15	
纯律小音阶相邻音程	9/8	16/15	10/9	9/8	16/15	9/8	10/9	
五度律律相邻音程	9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243	

可知纯律大、小音阶有大全音 9/8，小全音 10/9 和大半音 16/15 三种音程关系，但各音程所在的位置不同。若将纯律三种音程表示为：M=大全音=9/8，m=小全音=10/9，

s=大半音=16/15，则纯律大、小音阶关系就可以直接由这三个音程构造，例如在 *C* 大调中，纯律大、小音阶的构造方法为：

表 7　*C* 大调纯律大、小音阶构成公式

度数	音阶名	大音阶公式	数值	小音阶公式	数值
一	*C*	1	1	1	1
二	*D*	M	9/8	M	9/8
三	*E*	Mm	5/4	Ms	6/5
四	*F*	Mms	4/3	Msm	4/3
五	*G*	M^2ms	3/2	M^2sm	3/2
六	*A*	M^2m^2s	5/3	M^2s^2m	8/5
七	*B*	M^3m^2s	15/8	M^3s^2m	9/5
八	*c*	$M^3m^2s^2$	2/1	$M^3s^2m^2$	2/1

德国音乐理论家兼小提琴家豪普特曼（Moritz Hauptmann，1792-1868）认为纯律大音阶实际“只有三种立即明了的音程，即八度、大三度和纯五度”[2]。凭借这三种音程，不仅可以通过三个三和弦形式的三音列构成纯律大音阶，而且运用这三种音程的加减，还能获得与倍音一致的其它音程。例如，从纯五度减去纯律大三度，得到纯律小三度：

$$\frac{3}{2}(\text{纯五度}) \div \frac{5}{4}(\text{纯律大三度}) = \frac{6}{5}(\text{纯律小三度})\quad(\text{五倍音到六倍音})$$

又如，从纯四度减去纯律大三度，即得大半音：

$$\frac{4}{3}(\text{纯四度}) \div \frac{5}{4}(\text{纯律大三度}) = \frac{16}{15}(\text{大半音})\quad(\text{十五倍到十六倍音})$$

这就可以证明，根据自然法则的纯律，也对自然法则有所选择。

3.2 纯律的应用

五度相生律适用于“单音体”（monophony）音乐的曲调上，但是当音乐变为和弦结构的“多声部”（包括“复音体”polyphony 和“主音体”homophony）时，律制就开始倾向于纯律的应用。纯律解决了多声部结合时声音和谐的问题，但是也不能解决“返宫”问题，这是纯律本身存在的一个矛盾。同时由于曲调与和弦互有关系，使适于曲调的五度相生律和适于和弦的纯律两者之间，发生了一定的矛盾。也就是说，这种律制除了本身存在着矛盾之外，又与其他律制发生了矛盾。历代律学家为了适应音乐实践的需要，力求解决这些矛盾，关于纯律理论的探索研究，将在下文中展开论述。

古琴是中国古代传统的弹拨弦乐器，“琴律”一词最早出现在朱熹的《琴律说》。《宋

史·乐志》言："八音以丝为君，丝以琴为君。众器之中，琴德最优。"孔子（公元前551-前479年）、司马相如（公元前179-前117年）、嵇康（223-262年）都以善弹琴著称。

古琴上面定音，有三何种方法：散、按、泛。散音，是空弦发音；按音是左手指按弦发音，移动手指可改变音高，奏出这种滑音、颤音和其它装饰音；泛音就是左手指虚触徽位所发出的音。宋代杨旸说："左（手）微按弦，右手击弦，冷冷然轻清是泛声也"①。这句话就是说从按音的徽位和泛音的位置，就可以判断出所用律制的种类。琴上有七弦十三徽，其中第三、六、八及十一徽四个徽位上的泛音都是纯律所独有的音，而其余九个徽位上的泛音则是纯律和三分损益律所通用的音[14]。因此，一首琴曲如果用到了三、六、八、十一徽上的泛音，就可以确定这首琴曲所用的就是纯律。琴上徽位是决定琴律的关键，十三徽在琴上的具体位置如下：

表8 十三徽在琴弦上的位置

徽位	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
弦长比	7/8	5/6	4/5	3/4	2/3	3/5	1/2	2/5	1/3	1/4	1/5	1/6	1/8

由上表看出；在五分弦处（弦长比为1/5，2/5，3/5，4/5）的第三、六、八、十一徽和在六分弦处（弦长比为1/6，5/6）的第二、十二徽，正是第五泛音和第六泛音的位置，在其上弹奏出的泛音必然产生出纯律。在三分弦处（弦长比为1/3，2/3）的第五、九徽，是三分损益律泛音的位置；六分弦处的按音又是五度律高八度，即空弦散音的第十二度；二、四、八分弦处分别为空弦散音的高八度、两个八度和三个八度。由此可见，除了五分弦处为纯律所特有，其余各徽位为纯律、三分损益律共有。因此，琴律就是三分损益律和纯律兼有的一种复合律制。

中国古代关于琴徽的记载最早见于汉刘安（公元前179-前122年）的《淮南子·脩务训》：

"今夫盲者，目不能别昼夜、分黑白，然而搏琴抚弦，参弹复徽，攫援摽拂，手若蔑蒙，不失一弦。"②

琴上十三徽的设置不仅在琴徽上表明泛音与纯律的应用，从现存的大量琴谱看，古代琴家确实已应用了纯律。如南北朝时期梁朝丘明(494-590年)所传的《碣石调幽兰谱》，在七弦十三徽上的泛音都已用到。明朱载堉关于琴律的计算有非常高明的方法：

① 杨旸《琴声经纬》，转引自《古今图书集成·经济汇编·乐律典》卷104《琴瑟部汇考二》
② 淮南子《淮南子·脩务训》

“惟琴家安徽，其法四折其一，三折其一，俗工口传，莫知从来，疑必古人遗法。如此特未记载于文字耳。礼失求诸野，不可以其下俚而忽之也。”

朱载堉写下这段文字给予琴律算法高度评价的同时，关于琴弦的折叠法举出了三折、四折的例子似乎也在暗示他“新法密率”的来源。古代的琴工或琴师在造琴的过程中，必须同时找到一定弦长的泛音位置，以便在琴上安徽。他们经过多次的反复测音试验发现三分损益和纯律正好处在将弦三折、四折的、五折、六折的折痕处。这种琴弦折叠法是中国古代音乐家和律学家创造的，既简单又准确，数学计算隐含其中，又便于琴工世代口传相授[29]。对此，朱载堉又写道：

“琴家自岳山至龙龈二者间用纸一条，作为四折，以定四徽、七徽、十徽；作为五折，以定三徽、六徽、八徽、十一徽；作为六折，以定二徽、五徽、七徽、九徽、十二徽；手模两徽，乃四徽折半也。此法最为简易。若以算法定之，则置琴长若干为实，四归得四徽，一倍即七徽，二倍即十徽也；五归得三徽，一倍即六徽，二倍即八徽，三倍即十一徽也；六归得二徽，一倍即五徽，二倍即七徽，三倍即九徽，四倍即十二徽也；八归得一徽，七因之即十三徽也。”

确定或计算弦长徽位，也就是确定或计算两端固定的弦线振动的各个自然泛音的位置和相对音高。由于古琴在古代文化生活中占据重要地位，因此，关于泛音和琴律的问题在古代也是广为人知的。宋代姜夔（1155-1221 年）、朱熹，明朱载堉等人都对此深有研究。朱载堉说：“琴中有徽”，“徽间有律”，“当徽之处，泛音则鸣，否则不鸣。”绝大多数的儒生也都明白：

“琴之十三徽，犹十二经络之穴也。以泛音观之，乃天地自然之妙，非人力所能为也。张一弦于弓，鼓之作泛音，与琴之十三徽无异。”

值得注意的是，琴徽的应用表明人们已发现并运用了纯律大小三度、大六度等音程，假定古琴从外到内分别为 *C*、*D*、*E*、*F*、*G*、*A*、*B* 这样一种最普通的定弦法，那么不难发现，纯律大音阶的 *E*、*A*、*B* 各音阶的计算方法与上节中的讨论也是一致的：*E* 是 *C* 弦 11 徽的泛音：5/4；*A* 是 *C* 弦 8 徽的泛音：5/3；*B* 是 *G* 弦 11 徽的泛音：$3/2\times5/4=15/8$. 只要在如此定弦的琴上取 11 徽，8 徽的泛音就能组成纯律大音阶。杨荫浏先生考证过琴曲《碣石调幽兰谱》运用了 3，6，8，11 徽的全部泛音，这就表明该谱实际已运用到了纯律大音阶[14]。

3.3 小结

与纯律在中国的应用情况相比，古希腊毕达哥拉斯的第二代信徒阿契塔（Archytas，约公元前 400-前 350 年）最早发现了纯律大三度音程 5/4；地理学家埃拉托色尼（Eratosthenes，约公元前 276-前 196 年）发现了纯律小三度音程 6/5；天文学家托勒密（Ptolemy，约 90-160 年）等人发现纯律四声音列。但是此后，西方纯律在理论和实践中都没有继续发展，直到公元 13-14 世纪复音音乐兴起以后，西班牙音乐家拉莫斯（Rartolomeo Ramos，1441-1491 年）才建立了含纯律音程的七声音阶。意大利音乐理论家扎利诺（G.Zarlino，约 1517-1590 年）奠定了纯律的理论基础，而关于纯律理论更多更细的论述则与中国琴律类似。因此，可以说，国际有着讲述纯律的理论，却基本上没有应用纯律的实践。中国则正相反：中国古代从来没有出现过关于纯律的任何理论，却毫无疑问，在琴的弹奏中间，的确体现了运用纯律的实际经验[30]。

第四章　十二平均律计算体系

由第二章已经知道，三分损益法不仅定律法简单，而且由它所得到的纯五度（3/2）、纯四度（4/3）、大全音（9/8）都是简单分数比，产生的乐音悦耳动听。但是三分损益法的计算不能“返宫”。为了实现“返宫”，从汉代开始，诸多律学家都为此作了大量的努力，取得了许多积极的结果。到公元 1584 年，我国伟大的音乐理论家、数学家、天文学家朱载堉（1536-1611 年）首创了十二平均律，一举解决了“返宫”难题，比德国音乐家魏克迈斯特（Andreas Werckmeiste）在 1691 年创造的平均律要早一百多年[11]。本章将从朱载堉之前的历代律学家探索新律出发来介绍十二平均律创立的全部过程。

4.1 探求新律时期

中国古代认为“律历之数乃天地之道”，为了实现“乐和政平”，探求社会和谐的至深奥秘，就必须不断完善与改进律学计算方法以契合音乐实践的需求。三分损益法在生律十二次到达第十三律时，不能回归到出发律上，使得十二律不能周而复始，给十二律“旋相为宫”的理想造成了很大的障碍。中国历代律学家在解决这一问题上，总体呈现出两类途径：一类是在生到十二律后，继续向下生，有的生到六十律，甚至是三百六十律，生律越多，固然越有可能回到出发律上，但是这个办法在实践上受到很大的限制，无论是在乐器制造还是演奏实践方面，都会遇到困难；而另一类则是在十二律本身内部调整各律的高度，使得十二律最终实现“返宫”。

4.1.1 京房六十律与钱乐之、沈重三百六十律

为了消除音差，最早的尝试是增加律的个数。在八度之内设定更多的律，多于十二律的部分就称为“变律”，随着律数的增多，音差也在相应的减小。沿着这条路线推进的有京房、钱乐之和沈重，他们将十二律增加到六十律和三百六十律。

汉代京房（公元前 77-37 年），字君明，东郡顿丘人人（今河南清丰西南）人，“好钟律，知音声”，精通律学和天文历法计算。他按照三分损益的推算方法算出十二律后，又继续计算到了六十律。其六十律上承先秦，下启魏晋南北朝，对于秦汉间三分损益十二正律的传统是一个重大突破，也启迪后世律学家做出多方探索。《后汉书・律历志》记载：

“元帝时（公元前 48-前 33 年），郎中京房知五声之音，六律之数。上使太子大傅（韦）玄成（字少翁）、谏议大夫章，杂试问房于乐府。房对：“受学故小黄令焦延寿。

六十律相生之法：以上生下，皆三生二；以下生上，皆三生四。阳下生阴，阴上生阳，终于中吕，而十二律毕矣。中吕上升执始，执始下生去灭，上下相生，终于南事，六十律毕矣。夫十二律之变至于六十，犹八卦之变至于六十四也……”①

京房的六十律仍属于三分损益律范畴，具体计算法是：

“黄钟，律吕之首，而生一十二律也。其相生也，皆三分而损益之。是故十二律得十七万七千一百四十七，是为黄钟之实。又以二乘而三约之，是为下生林钟之实……推此上下，以定六十律之实。”

京房确定出黄钟律数 177147、黄钟律长 9 寸、京房准黄钟长 9 尺的三种计算数据。他依照三分损益法计算由第 12 律仲吕再上生一律到第 13 律执始（上生 7 次$(4/3)^7$，下生 5 次$(2/3)^5$），并不能回到出发律黄钟。执始与黄钟的频率比为：

$$f_{12}/f_0=l_0/l_{12}=3^{12}/2^{19} \qquad (f\text{为频率，}l\text{为律长}) \qquad (4.1)$$

这就说明依照三分损益法计算所得之律执始与黄钟之间存在频率差，将(4.1)式代入下式，用音分值表示执始与黄钟的音差为：

$$x_{12}=1200log(f_{12}/f_0)/log2=23.46cent$$

这个音差就称为最大音差或古代音差。为了消除这个音差，也就是为了实现“返宫”，从汉代开始，许多律学家为此做出了努力，这也成为推动古代律学发展的内在动力。京房依照三分损益法，通过计算更多的律来寻找黄钟还原的可能，事实上，当他生律 53 次计算到第 54 律时，得到了比执始律更接近黄钟的色育律：

$$x_{53}=1200log(f_{53}/f_0)/log2=3.615cent$$

其音分值与黄钟只有 3.61 音分之差，已达到了六十律与黄钟律的最小差值。这个数值，现在称为京房音差[31]。在理论上，京房音差使古代音差大大缩小，人耳难于辨别。但就乐器制造与演奏实践而言，六十律的应用就很困难，其本来就不具有实用价值。因此，在京房之后，“无晓六十律以准调音者”。何承天说到：“依案古典及音乐家用六十律者，无施于乐”。这都表明，京房六十律并非实践应用，而是一种理论上的音律探讨。

在京房之后，南北朝刘宋元嘉年间（424-453 年），太史钱乐之在京房六十律的基础上又推演到三百六十律，从而将依三分损益法生律的个数推向了一个高峰[16]。据《隋书·律历志》记载：

“宋元嘉中，太史钱乐之因京房南事之余，引而伸之更为三百律，终于安运，长四

① 《后汉书·律历志》

寸四分有奇。总合归为三百六十律。日当一管。宫徵旋韵，各依次之。”[①]

钱乐之的理论探讨在刘宋朝未受重视。梁朝博士沈重（500-583 年）又重新计算了三百六十律。《隋书·律历志》载：

“沈重乃依《淮南》本数，用京房之术求之，得三百六十律。”[①]其计算方法为：

“自黄钟终于壮进，一百五十律，皆以三分损一以下生。自依行终于亿兆，二百九律，皆三分益一以上生。唯安运一律为终，不生。其数皆取黄钟之实十七万七千一百四十七为本，以九三为法，各除其实，得寸分及小分，余皆委之，即各其律之长也。修其律部，则上生下生宫徵之次也。”

这里详细记载了沈重三百六十律的律部、律名。这样用三分损益法算得的第 360 律即安运律的音分值由下生 150 次，上生 209 次可知：

$$f_{359}/f_0=l_0/l_{359}=(3/2)^{150}(3/4)^{209}=3^{259}/2^{568} \qquad (4.2)$$

将(4.2)式代入下式，得安运与黄钟律的音差缩小为：

$$x_{359}=1200log(f_{359}/f_0)/log2=1.845cent$$

这个音差称为沈氏（钱氏）音差。实际上，也不必计算到第 360 律安运律，第 307 律亿兆律更接近黄钟：$x_{306}=1200log(f_{306}/f_0)/log2=-1.77cent$

表 9　京房与钱乐之三分损益法生律音差

生律次数 *n*	12（13）	53（54）	306（307）	359（360）
n / *m*	12/19	53/84	306/485	359/569
音分值 *cent*	23.460	3.615	-1.770	1.845

附注 9：*n* 为相生次数，*m* 相生指数

安运、亿兆律小于京房音差，近似于最大音差（23.460*cent*）的 1/13。由于人耳对于 2 音分以下的音差是绝对听不出来的，因此，三百六十律在效果上几乎已实现了“返宫”。三百六十律的内部结构非常精细，为后代律学家探索新律提供了极好的理论借鉴。

4.1.2 何承天、刘焯和王朴定律法

保持十二律，只在各律之间做出相应的调整，使之达到旋宫转调的要求，沿着这条路努力的有何承天、刘焯和王朴等。南北朝时期，何承天（370-447 年）精通律学和历法。他反对京房一味增加律数的做法，而是在十二律内部调整各律的高度，使十二律中最后一律可以回到出发律上，从而实现“返宫”。《隋书·律历志》援引何承天的话说：

[①]《隋书·律历志》

“上下相生，三分损益其一，盖是古人简易之法……后人改制，皆不同焉。而京房不悟，谬为六十。承天更设新率，则从仲吕还得黄钟。十二旋宫，声韵无失。黄钟长九寸，太簇长八寸二厘，林钟长六寸一厘，应钟长四寸七分九厘强。其仲吕上生所益之分，还得十七万七千一百四十七，复十二辰参之数。”②

这种由三分损益法衍生出来的“新律”，与《吕氏春秋》所计算的十二律区别在于：何承天发现从黄钟生律十一次得仲吕，如果再从仲吕生律一次：$6.66\times\frac{2}{3}=4.44$，这个就是清黄钟的长度。把 4.44 移低八度，并不能得到出发律黄钟 9.00，而是 8.88，它比黄钟短：9.00-8.88=0.12，何承天将这个差数 0.12 分为公差为 0.12/12=0.01 的 13 项等差数列，逐项递加在各律长度之上，这样就能保证最后所生清黄钟律长为 4.50，且与前面由三分损益法所生各律差数不致过大。尽管在理论上，何承天的新律不是准确的十二平均律，但是在效果上已经十分接近，计算程序如下表所示：

表 10　何承天新律与十二平均律音分值比较

次序	律名	音名	律长	算法	何律长	何承天音分值	平均律音分值	差值
1(1)	黄钟	*C*	9	+0.00	9.00	0	0	0
2(8)	大吕	#*C*	8.42	+0.07	8.49	99.2	100	-0.8
3(3)	太簇	*D*	8	+0.02	8.02	199.5	200	-0.5
4(10)	夹钟	#*D*	7.49	+0.09	7.58	296.7	300	-3.3
5(5)	姑洗	*E*	7.11	+0.04	7.15	398.0	400	-2.0
6(12)	仲吕	*F*	6.66	+0.11	6.77	492.9	500	-7.1
7(7)	蕤宾	#*F*	6.32	+0.06	6.38	595.2	600	-4.8
8(2)	林钟	*G*	6	+0.01	6.01	699.0	700	-1.0
9(9)	夷则	#*G*	5.62	+0.08	5.70	790.9	800	-9.1
10(4)	南吕	*A*	5.33	+0.03	5.36	896.1	900	-3.9
11(11)	无射	#*A*	4.99	+0.10	5.09	984.9	1000	-15.1
12(6)	应钟	*B*	4.74	+0.05	4.79	1091.4	1100	-8.6
13(13)	清黄钟	*c*	8.88/2	+0.12/2	4.50	1200.0	1200	0

附注 10：律长单位：寸；音分值，音分差单位：音分

从何承天创造最早的十二平均律后，经过一段时间的探索时期，隋朝刘焯和五代王朴都在十二律内调整格律的长度，但都没有超越何承天的精确程度。公元 604 年，隋朝

① 《隋书·律历志》
② 《隋书·律历志》

刘焯(581-618 年)，提出一种新律制，据《隋书·律历志》记载：

“其黄钟管六十三为实，以次每律减三分；以七为寸法，约之，得黄钟长九寸，太簇长八寸一分四厘，林钟长六寸，应钟长四寸二分八厘七分之四。”[①]

将刘焯计算法用算式表示则如下：

$$l_n = \frac{63-3n}{7} = 9 - \frac{3}{7}n \qquad (n=0，1，2，\ldots 11)$$

十二律管的长度用l_n表示，n对应十二律。由此可以看出，刘焯计算十二律的方法已经完全不以三分损益法为基础，而是以 3/7 为公差的等差数列来计算各律长度，打破了长久以来的律学计算传统，刘焯律以半音次序相生如下：

表 11 刘焯律

次序	律名	音名	算法	律长	刘卓律	平均律	差值
1(1)	黄钟	C	$\frac{63}{7}$	9.00	0	0	0
2(8)	大吕	$^{\#}C$	$\frac{63-3}{7}$	8.57	79.8	100	-20.2
3(3)	太簇	D	$\frac{60-3}{7}$	8.14	163.7	200	-36.3
4(10)	夹钟	$^{\#}D$	$\frac{57-3}{7}$	7.71	251.7	300	-48.3
5(5)	姑洗	E	$\frac{54-3}{7}$	7.28	344.5	400	-55.5
6(12)	仲吕	F	$\frac{51-3}{7}$	6.85	442.5	500	-57.5
7(7)	蕤宾	$^{\#}F$	$\frac{48-3}{7}$	6.42	546.4	600	-53.6
8(2)	林钟	G	$\frac{45-3}{7}$	6.00	656.9	700	-43.1
9(9)	夷则	$^{\#}G$	$\frac{42-3}{7}$	5.57	775.1	800	-24.9
10(4)	南吕	A	$\frac{39-3}{7}$	5.14	901.8	900	1.8
11(11)	无射	$^{\#}A$	$\frac{36-3}{7}$	4.71	1038.5	1000	38.5
12(6)	应钟	B	$\frac{33-3}{7}$	4.28	1186.9	1100	86.9
13(13)	清黄钟	c	$\frac{30-3}{7}$	3.85	1349.4	1200	149.4

附注 11：律长单位：寸；音分值，音分差单位：音分

[1] 《隋书·律历志》

这样计算所得十二律，各相邻律之间振动体的长度差数都相同，但由于音程关系取决于频率比而不是频率差，刘焯新律算法不仅不能返宫，还使得十二律的音高变得十分混乱。但是，他不用三分损益法却是个创举，同时又指明以长度上的等差数列定律绝对不能实现旋宫转调[2]。

五代（907-960 年）王朴精于律学和天文历法，周世宗显德六年（959 年）提出一种新律。据《旧五代史・乐志》记载：

“以为众管互吹，用声不便，乃做律准十三弦宣声。长九尺，张弦各如黄钟。以第八弦六尺，设柱为林钟。第三弦八尺，社柱为太簇。第十弦五尺三寸四分，设柱为南吕。第五弦七尺一寸三分，设柱为姑洗。第十二弦四尺七寸五分，设柱为应钟。第七弦六尺三寸三分，设柱为蕤宾。第二弦八尺四寸四分，设柱为大吕。第九弦五尺六寸三分，设柱为夷则。第四弦七尺五寸一分，设柱为夹钟。第十一弦五尺一分，设柱为无射。第六弦六尺六寸八分，设柱为中吕。第十三弦四尺五寸，设柱为黄钟之清声。十二律中，旋用七声为均。为均之主者，宫也；徵、商、羽、角、变宫、变徵次焉。发其均主之声，归乎本音之律，七声迭应而不乱，乃成其调，均有七调。声有十二均，合八十四调。歌奏之曲，由之出焉。”①

王朴以三分损益法为基础，在十二律内做出适当调整，得出十二律的所有律长数据及相生次序。从“长九尺，张弦各如黄钟第十三弦四尺五寸，设柱为黄钟之清声……”，知他以完全八度作为其律学计算的基础[32]。“十二律中，旋用七声为均……”，这段话来看，王朴旨在探索十二平均律：

表 12　王朴律

次序	律名	音名	律长	算法	王律律长	王朴律音分值	平均律音分值	差值
1(1)	黄钟	*C*	9	+0	9.00	0	0	0
2(8)	大吕	#*C*	8.42	+0.02	8.44	111	100	11
3(3)	太簇	*D*	8		8.00	204	200	4
4(10)	夹钟	#*D*	7.49	+0.02	7.51	313	300	13
5(5)	姑洗	*E*	7.11	+0.02	7.13	403	400	3
6(12)	仲吕	*F*	6.66	+0.02	6.68	516	500	16
7(7)	蕤宾	#*F*	6.32	+0.01	6.33	609	600	9
8(2)	林钟	*G*	6		6.00	702	700	2

① 《旧五代史・乐志》

表 12（续）

次序	律名	音名	律长	算法	王律律长	王朴律音分值	平均律音分值	差值
9(9)	夷则	$^{\#}G$	5.62	+0.01	5.63	812	800	12
10(4)	南吕	A	5.33	+0.01	5.34	904	900	4
11(11)	无射	$^{\#}A$	4.99	+0.02	5.01	1014	1000	14
12(6)	应钟	B	4.74	+0.01	4.75	1106	1100	6
13(13)	清黄钟	c	8.88	8.88/2 +0.06	4.50	1200.0	1200	0

附注 12：律长单位：寸；音分值、音分差单位：音分

王朴受京房律和京房律准的影响，应用弦线律准定律，主依听音度律，适当的调整了他的十二律数值。他的细微改动使得各律对黄钟的音分值非常接近十二平均律且全部都为整数值，差数最大的（仲吕）是 16 音分，这使得依靠仪器辅助计算音律并旋宫的可能成为了现实[32]。

4.1.3 对三分损益法不可返宫的证明

由上几节可知，在探索新律的过程中，依照三分损益法计算的结果始终没有实现"返宫"。沈重、钱乐之的计算将三分损益法的律数提高到了 360 个，随着律数的增加，其音分值似乎也更加接近于黄钟，但按照增加律数的方法在理论上是否能够最终实现"返宫"？这方面的证明可借助于分数逼近的数学方法。

从黄钟开始，由两个相生因子 2/3，4/3 计算 n 次（上生与下生次数之和）生律后所得律与黄钟的频率比为：

$$f_n/f_0=l_0/l_n=3^n/2^m \quad (m,n\text{为正整数})$$

其中：n 为生律次数，m 使得 $f_n/f_0\in(1,2)$。对上式两边求对数：

$$\log(f_n/f_0)=\log(3^n/2^m)$$

$$=n\log 3-m\log 2 \qquad (4.3)$$

将(4.3)式代入计算音程值：

$$\frac{1200}{\log 2}=\frac{x_n}{\log(f_n/f_0)}$$

$$x_n=1200\log(f_n/f_0)/\log 2=1200n[(\log 3/\log 2-m/n)]$$

因为$\log 3/\log 2$=1.58496250072115618145373894394782...为无理数，而分数 m/n 为

有理数，因此x_n永远不可能为 0。也就是说，无论n为何值，按照三分损益法继续往下计算多少次，音差还是不能消除，而只能相对地缩小，三分损益律不能实现“返宫”[26]。

4.2 十二平均律理论

在探索新律的道路上，历代律学家逐渐认识到通过三分损益法计算的结果不能实现“返宫”的事实。直到明代朱载堉创立了十二平均律才一举解决了这一难题。十二平均律用现代数学表示：第一步，将八度音程 2 开平方，再连续开平方、开立方，得到$\sqrt[12]{2}$；第二步，连乘 12 次$\sqrt[12]{2}$得到了以$\sqrt[12]{2}$为公比为的等比数列，对应八度内的十二平均律。

具体算法可用以下公式表示：$T_n \cdot \sqrt[12]{2} = T_{n+1}$　　(n=0,1,2,…,12)

当n=0 时，T_0=1 为黄钟律，T_1为大吕律其各项值如下表所示：

表 13　十二平均律各参数

次序	律名	音名	算法	频率倍数	与 C 频率比	音分值	相邻音程
1	黄钟	C	1	1	1	0	
							100
2	大吕	$^{\#}C$	$2^{1/12}$	1.05946	89/84	100	
							100
3	太簇	D	$2^{2/12}$	1.12246	449/440	200	
							100
4	夹钟	$^{\#}D$	$2^{3/12}$	1.18940	44/37	300	
							100
5	姑洗	E	$2^{4/12}$	1.25992	63/50	400	
							100
6	仲吕	F	$2^{5/12}$	1.33483	303/227	500	
							100
7	蕤宾	$^{\#}F$	$2^{6/12}$	1.41421	140/90	600	
							100
8	林钟	G	$2^{7/12}$	1.49830	433/289	700	
							100
9	夷则	$^{\#}G$	$2^{8/12}$	1.58740	100/63	800	
							100
10	南吕	A	$2^{9/12}$	1.68179	37/22	900	
							100
11	无射	$^{\#}A$	$2^{10/12}$	1.78179	98/55	1000	
							100
12	应钟	B	$2^{11/12}$	1.88774	168/89	1100	
							100
13	清黄钟	c	2	2	2/1	1200	

附注 13：音分值单位：音分

由上表可以看出十二平均律各律的产生法：假定起始律黄钟的频率为 1 个单位，其余各律的频率倍数就是相应幂的数值；从“音分值”可以看出到C的音程逐级递加 100 音分，即“相邻两律间的音程”都是 100 音分，这正是十二平均律的显著特征。各律都相当于半音，八度内十二个律就是十二个半音。在这种律制下，以黄钟或者其它任一律

为宫，除了调高变化外，声音效果是完全相同的，即音高距离相等，可以实现旋宫转调。正是由此，十二平均律自诞生以来，就逐渐被广泛的采用[15]。

4.2.1 十二平均律的理论来源

十二平均律无疑是古代中国对世界文明做出的伟大贡献，然而关于朱载堉发明十二平均律的具体计算方法问题上，却仍存在着一些疑问[33]。不少学者认为，朱载堉只给出了计算结果，而没有具体的计算过程以及原理。库特纳(F. A. Kuttner)认为："从年代上说，毫无疑问，王子载堉是第一个在1584年提出了一个九位数十二平均律的各律音高数值……但是，朱载堉在1584年没有对平均律作出数学的或理论的解说，严格说来，它是一种数字演算，何况这王子只指出了部分的演算程序"[34]。而戴念祖先生则提出了反对的意见，他认为"朱载堉虽然没有以求解等比数列的方法将十二平均律的各个律数一一列举求出，但从求解等比数列任意项的方法而言，他举的这些例子实际上已经完备无疑了。再举其他律的求法是多余的"[35]。英国剑桥大学李约瑟教授（Joseph Needham）在他主编巨著《中国科学技术史》（Science and Civilisation in China）中对此作了很诚恳的评价："中国（人）用数学方式首创十二平均律，的确是可歌颂的一个荣誉。一个并非耀眼却很珍贵的礼物是隐藏在这位退让学者的实践中，他有让国高风，致力研究，自信如能通晓礼乐之道，无事不克。这种信念激励了二千多年来中国从事声律的学者"[36]。

朱载堉（1536-1614年）生于郑王封地怀庆府，字伯勤，号句曲山人，是明仁宗朱高炽（1378-1425年）的第六代孙，明开国皇帝朱元璋（1328-1398年）的第九代孙。十一岁时（嘉靖二十五年，1546年）被册封为"世子"。其父明郑恭王朱厚烷，因涉统治阶级内部的矛盾，受处入狱。朱载堉因不满当时的政治腐败，在其父入狱期间，筑土室于宫门外，独居十九年，期间钻研律学、数学、天文历法和舞蹈，直到其父出狱[37]。

朱载堉一生著述颇丰，代表作是《乐律全书》，它包括《律历融通》四卷附《音义》一卷；《律学新说》四卷；《算学新说》，不分卷；《乐学新说》不分卷；《律吕精义》"内篇"十卷、"外篇"十卷，统称为《律书》。在《乐律全书》之外的还有《琴谱》十卷，《律吕正论》四卷，《律吕质疑辨惑》一卷，《嘉量算经》三卷，《圜方句股图解》不分卷等。这些著作涉及到律学、音乐学、历法、数学和珠算、计量学、乐器制造、乐谱、物理学、文学和绘画等丰富的内容。

汉京房六十律，南北朝钱乐之三百六十律认为三分损益法生律越多，越有可能回到出发律黄钟的指导思想，皆未能在理论上解决黄钟还原。朱载堉为了实现律学上对"黄

钟还原”的追求，以便“还相为宫”，批判地总结前人的经验教训，并努力探寻新方法，最终创立了十二平均律。《乐律全书》处处表现出了这一思想，他指出京房、钱乐之、沈重等人在十二律之外增加新律的错误：

“但以三分损益之法衍之，殆不止三百六十律，虽至百千万亿，往而不返，终不能合还元之数，况于六十律哉，是皆惑于数而昧于声者也。吾尝观仲吕、黄钟之交，知声音有出于度数之外者。”①

朱载堉在此基础之上首次明确提出并用数学方法直接论证三分损益不能回到黄钟，他还多次述及“三分损益往而不返，其弊盖由七五为法，法太过，而实不及也”②，即生律因子 50/75、100/75 的分母太大，分子太小。他指出“有以倍数四因之者，则三分之不尽二，算而亏数已多；有以正数四因之者，则亦有一算不行，而亏数且过半矣。”③这表明，他从生律计算的程序、结果以及生律因子“三分不尽”的特点进行剖析、验证，从而归纳、概括得出“三分损益之法衍之……往而不返，终不能合还元之数”④。

同时，朱载堉已经清楚的认识到，在十二律之外增加律数是行不通的，进而构建出运用数学方法突破三分损益律计算的思想框架，指出欲还原黄钟必须立足新的律制，新律的探索势在必行。他通过敏锐的观察和实验，同时发现三分损益法计算所得的十二律不能包括所有的音，正律和黄钟之间的音就在律数之外[38]。由于声与数之间需要调和，朱载堉关于十二律的计算是建立在尊重乐调实践的基础之上，并不是一味的以数定音。同时他又指出何天承、刘焯等人在十二律内返回黄钟的定律法：

“强使还原，故其所增之分出于人为傅会之私，而非天成自然之理，是以不能取信于人。”

虽然如此，朱载堉还是肯定了他们的定律法“似亦有见矣”。朱载堉作为律学史上一个革新者，认清了律学的发展路线，深知何天承、刘焯等人的见解有利于他创制一种全新的定律法。朱载堉不仅运用数学对律学计算问题进行论证，还以数学方法构造出了新律模型。他批判性的吸取原有律制的合理成分并确定出新的制律条件：1）以精确的八度弦长比为 2/1 作为其制律之本；2）指出音高的变化取决于弦长之比而非弦长之差。

这些条件都可以从朱载堉所处时代已经具备的律学知识和当时已有的律准弹奏试验中得出。朱载堉通过弹奏试验来寻找介于黄钟倍律与正律之间的其余 11 律的分布规

① 朱载堉《律学新说》卷一《立均第九》
② 朱载堉《律学新说》卷一《立均第九》
③ 朱载堉《律学新说》卷一《立均第九》
④ 朱载堉《律学新说》卷一《立均第九》

律，在排除按照等差分布的方法后，继续探索它们之间存在的某种等量关系。假设黄钟倍律弦长为2，正律弦长为1，又知蕤宾倍律在十三律正中位置，为了实现旋宫转调，首先应使：

黄钟倍律：蕤宾倍律=蕤宾倍律：黄钟正律

$$黄钟倍律 \cdot 黄钟正律=蕤宾倍律^2$$

由此可知蕤宾倍律为黄钟倍律和黄钟正律的比例中项，又已知：

$$黄钟倍律 \cdot 黄钟正律=2$$

即得：

$$蕤宾倍律=\sqrt{2}$$

新律等比数列模型建立以后，就要求解这一等比数列的公比（生律因子）、各律律数（各律密率）及生律方法。早在汉《周髀算经》（约公元前1世纪成书）中即已涉及到数列，而《九章算术》在粟米章、衰分章、均输章和句股章已有了许多不同类型的比例求解问题[39]。因而在明朱载堉时期，求解十二平均律等比数列问题本身已不再是难题，唯独艰难的是如何迈出渊源已久的三分损益法，进而寻求等比计算解决旋宫问题的可能性，这与他对律学计算问题本质的理解和对弦线进行反复实验探索声学本质是密切相关的。

值得留意的是，这种思想反复见于朱载堉律学著作中。朱载堉于万历三十四年（1606年）将他的两部著作《律学新说》（万历十二年1584年）、《律吕精义》（万历二十四年1596年）呈于明神宗时，已把著书的旨趣，作律的新法，扼要述明：

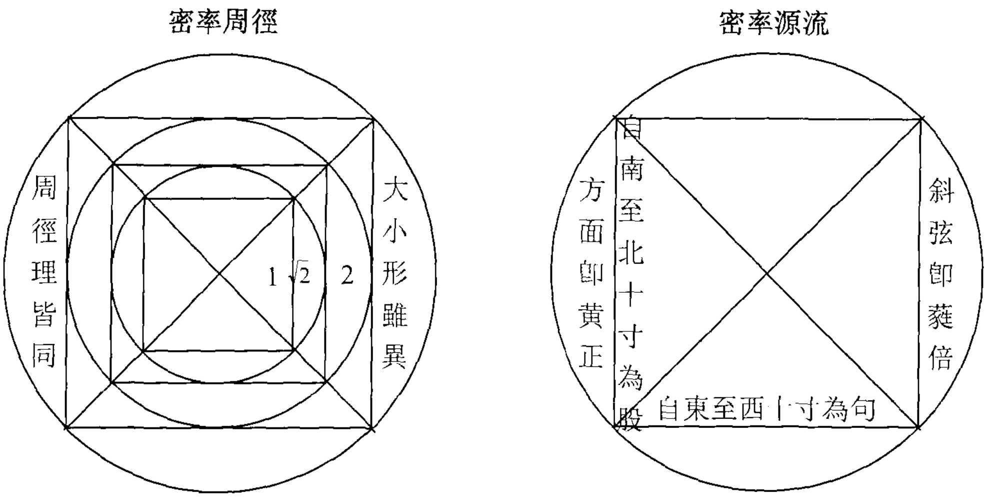
“汉志度本起于黄钟之长，依舅父何瑭之说，其长则为一尺；古云长九寸，长八寸一分之类，尺一而律同。……律家三分益一，三分损一，犹历家四分度之一，与周三径一等，皆取大略言之，非精义也。新法算律与方圆，用句股术，其法本诸《周礼・䳭氏为量》‘内方尺而圆其外’。夫内方尺而圆其外，则圆径与方斜同，知方之斜，即知圆之径矣。方边即黄钟，圆径即蕤宾，由蕤宾可生南吕，由南吕可生应钟，则始终循环，诸律皆可相生，安有往而不反之理哉。”①

表面上看这段文字，好像只有数学的意义；但是综合来看，朱载堉实际上仍是以律学为主，数学为辅。他依据周䳭量器“方圆相函”图象中方边与圆径的关系，作为其“密率源流”。渊源于中国古代“以器载道”的思想以及“同律度量衡”制度。内方尺而圆其外，既是借助于周䳭、嘉量标准法器以古寓新，又是古代律学与数学所面临的共同问

① 《律吕精义》

题[33]。

将这段文字与蕤宾倍律的算法用图表示如下：



附注：‘原图注：第一層倍律外周也，第二層倍律内周卽正律外周也，三層、四層皆放此推之’

附注：‘原图注：密率源流，出于、於周禮考工記鬴氏為量内方尺而圆其外，詳見第十卷嘉量篇’

图 2　密率周径与密率源流示意图

“密率源流”与“密率周径”实际上已明示黄钟弦长从倍律到正律的演变规律：作为中间过渡的$\sqrt{2}$，因其位于 13 个律的正中位置，加上斜弦与正边递进关系，就理所当然的被推为蕤宾倍律弦长。依此得到蕤宾倍律=$\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}$的原始思路与朱载堉提及的关于十二平均律的理论来源正好契合。据此，我们有理由相信，朱载堉发明十二平均律确实是受到《周礼·鬴氏为量》这段文字的启发和帮助。

曾认为朱载堉此举仅仅是出于引经据典考虑的说法，此时也当不攻自破。即使是从科学社会学的角度来看，朱载堉这样的解释也是不无道理。以《周礼·鬴氏为量》为其“新法密率”作解释，在当时的社会历史条件下更有可能被理解和接受；同时，如果将八度旋宫视为一个周而复始完全密闭的圆周，那么作为中间音律的蕤宾就可以比作成将此圆一分为二的圆径，按照中国律学一贯的思想，诸律皆起于黄钟，故以黄钟一尺为句股，蕤宾倍律恰好可作弦，这种将数学推算与传统观念两相拟合的做法，在中国古代科学史上是不足为奇的。另外，《周礼·鬴氏为量》一方面确实对朱载堉发现蕤宾倍律$\sqrt{2}$给予了很大的启发；另一方面也更加形象化的表述了蕤宾倍律$\sqrt{2}$的计算程序，另外也为蕤宾倍律提供了一个与传统律学渊源相兼容的解释，用现代数学语言表述就是：它首

次为十二平均律计算赋予了一个几何解释[27]。

十二平均律首先在中国创立，其理论渊源还与我国律学发展本身的内部逻辑有关。在我国古代纯律只在古琴中得到过很好的应用，但却没有发展出相应的理论，西方的情形却是相反，在西方有各种关于纯律的理论，但基本上没有纯律实践[40]。律学计算的现实情况是，从纯律向十二平均律发展比从三分损益律向十二平均律在计算上所遇到的困难要大得多。前面我们提到，纯律与三分损益律的区别在于：纯律大三度 5/4，小三度 6/5，小六度 8/5，大六度 5/3，都是协和音程；而三分损益律的这几个音程的频率比为 81/64，32/27，128/81，27/16 这些都是不协和音程。从纯律转向十二平均律就要抛舍令人感兴趣的和声效果；而且复音音乐的曲调既有横向的又有纵向的联系，构成这些音程的纯律在转调方面具有比三分损益律更复杂的矛盾，以三分损益律为基础的单音音乐却只有横向联系。也就是说，从三分损益律到十二平均律将比纯律到十二平均律容易一些。朱载堉所处的时代仍然是一个无纯律理论的时代，朱载堉没有经历纯律带给他的麻烦，也没有受到纯律各种观念的束缚，在创建十二平均律的过程中，只需要从三分损益律出发达到旋宫转调的要求。这种律学发展本身的内部逻辑及其在东西方之间的不同之处，可以解释为什么十二平均律较早的在中国诞生了[41]。

最后再来看看朱载堉所处的环境影响。科学史和文化史都很注重创造的环境条件。在这方面，朱载堉可以说是得天独厚的：他的父亲朱厚烷是一个精通律学的亲王，他受到父亲的影响并得到他的指导；他的外舅祖何瑭又是一个在律学上富有创见的大儒。朱载堉本人也极为推崇他的父亲和外舅祖：

"臣父恭王厚烷存日颇好律吕，其悟性所自得，虽与先儒不无异同，而臣愚以为，其义或可补先儒所未发。"①朱厚烷不仅指导他撰写《琴》、《瑟》、《操缦》、《旋宫》等谱，甚至有："《律吕精义》乃臣父遗志，而臣愚所述也。"②

朱厚烷对朱载堉在新法密率上的鼓励见述下文：

"六经有听律之文，无算律之说。律由声制，非由度出。黄钟之声既定，则何必拘九寸。执守九寸为说，误矣。况又执守王莽尺与角斗铭，不亦误甚乎！盖律家所谓三分损其一者，犹历家所谓四分度之一也，皆大略之率耳。自汉刘歆以来千有余载，疑四分度之一者疑之转深而转密；信三分损其一者信之弥久而弥疏：何律历二家愚智相较、霄壤相悬也！夫数以理为本，而人心之灵又理数之本也。惟于理有未穷，故其知有不尽。

① 朱载堉《进律书奏疏》
② 朱载堉《律吕精义・序》

先儒岂欺我哉，彼于冥冥之中必有昭昭者存，但患学者不下苦功夫以求至当耳。援笙证琴，昭然易晓；援琴证律，显然甚明。仲吕顺生黄钟，返本还元；黄钟逆生仲吕，循环无端。实无往而不返之理。笙琴互证，则知三分损益之法非精义也。”①

朱厚烷对朱载堉的这番教诲，不仅告诫他要下苦功夫，还要他明白“律由声出，非由度出”的道理，也不必拘守历代黄钟尺寸，同时也指导他探求“理有未穷，而其知有不尽”的内涵，促使朱载堉克服三分损益律的障碍去探求新律。“仲吕顺生黄钟，返本还元；黄钟逆生仲吕，循环无端。实无往而不返之理。”这句话的律学意义正是属于十二平均律范畴的定律方法。这就表明，朱厚烷可能已经初步掌握了可以达到旋宫转调的调律法，并且已经有了十二平均律的某种表示方式，只是不曾加以简洁的数学表述罢了。因此，朱载堉也把《律吕精义》一书的写作归为完成“臣父遗志”。并写到：

“臣闻此语，潜思有年，用力既久，豁然遂悟不用三分损益之法，其义益精。律历皆赖臣父所诲，前敢忘父之志而不为芹暴之献乎。”②

除了他父亲朱厚烷的教诲外，他的外舅祖何瑭的著作也给他极大的启发。何瑭（1474-1543 年）是明代大儒之一，曾任浙江提学，南京太常少卿，工、户、礼三部侍郎，南京都察院右都御史等职，著有《乐律管见》等书。何瑭卒时朱载堉方 7 岁。朱载堉为自己因为年幼而没能亲聆何瑭教诲感到非常遗憾，他说：“慨生之既晚，不获与前辈同游，虽有一得之愚，无凭质问。”③

在前代律学家宗守黄钟 9 寸而不敢越雷池半步，又在 10 进制还是 9 进制上面争论不休时，何瑭却认为：

《汉志》谓黄钟之律九寸，加一寸为一尺。……若加一寸以为尺，则又何取于黄钟？殊不知黄钟之长，固非人所能为！至于九其寸而为律，十其寸而为尺，则人之所为也。《汉志》不知出此，乃欲加黄钟一寸为尺，谬矣！今按《汉志》，度本起于黄钟之长，则黄钟之长即是一尺。所谓长九寸、长八寸十分一之类，盖算家之立率而。④

这段话对朱载堉寻找历代黄钟标准律管的尺寸，推算历代度量衡制的演变，甚至发现不同进位制的小数换算方法，都起到了极为重要的作用。朱载堉摒弃了历代宗守的黄钟尺寸，选取了合适的起始音弦长数值，从而得到了充分的数理方面的理论依据。

① 《律吕精义·序》
② 《律吕精义·序》
③ 《律学新说》卷一前言
④ 《律学新说》卷一《律吕本源第一》

4.2.2 十二平均律的计算程序

十二平均律又被称为“新法密率”。“新法”是对三分损益法而言；“密率”则指应钟律数$\sqrt[12]{2}$。这就是十二平均律各律间的公比数，也是半音音程的比例数。朱载堉称他的新法密率为：

创立新法：置一尺为实，以密率除之，凡十二遍。[①]

朱载堉在《律吕精义》中具体给出了$\sqrt[12]{2}$的求法，及计算的经过：

“度本起于黄钟之长，即度法一尺。命平方一尺为黄钟之率。东西十寸为句，自乘得百寸为句幂；南北十寸为股，自乘得百寸为股幂；相并共得二百寸为弦幂。乃至弦幂为实，开平方法除之，得弦一尺四寸一分四厘二毫一丝三忽五微六纤二三七三〇九五〇四八八〇一六八九，为方之斜，即圆之径，亦即蕤宾倍律之率；以句十寸乘之，得平方积一百四十一寸四十二分一十三厘五十六毫……为实，开平方法除之，得一尺一寸八分九厘二毫〇七忽一微……即南吕倍律之率；仍以勾十寸乘之，右以股十寸乘之，得立方积一千一百八十九寸二百〇七分一百一十五厘〇〇二毫……为实，开立方法除之，得一尺〇五分九厘四毫六丝三忽〇九纤……即应钟倍律之率。盖十二律黄钟为始，应钟为终、终而复始，循环无端。此自然真理，尤贞后元生、坤尽复来也。是故各律皆以黄钟正数十寸乘之为实，皆以应钟倍数十寸〇五分九厘四毫六丝三忽〇九纤……为法除之，即得其次律也。安有往而不返之理哉。”[②]

这段文字是说，度量长度的标准尺起源于黄钟律长度，因此黄钟正长度就是长度标准尺的一尺。设一尺的平方为黄钟正律的幂，以句 10 寸自乘得 100 寸为句幂；以股 10 寸自乘，得 100 寸为股幂。将句股幂数相加，得弦幂为 200 寸：

$$\sqrt{10^2+10^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}=14.144\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 689\ （寸）$$

$$=1.4\ 144\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 689\ （尺）$$

这个数值既是以句股为正方形的斜边，也是正方形外接圆的直径，亦是蕤宾正律的二倍，称为蕤宾倍律。其法如图 3 所示：

按照中国律学的一贯思想：诸律皆起于黄钟，以一尺黄钟为句股，蕤宾倍律正好做斜弦；同样的，若以蕤宾正律为句股，也可以推算出黄钟正律作斜弦。

接上文中所述，再以句 10 寸乘蕤宾倍律，开平方：

[①] 朱载堉《律学新说》卷一《密率律度相求第三》

[②] 朱载堉《律吕精义·内篇》卷一《不用三分损益第三》

$$\sqrt{10\times10\sqrt{2}}=10\sqrt[4]{2}=1.189207\text{（尺）}$$

得到南吕倍律的长度。再以南吕倍律长度乘句 10 寸，股 10 寸，得三次乘积数值，开立方：$\sqrt[3]{10\times10\times10\sqrt[4]{2}}=10\sqrt[12]{2}=1.059463$（尺）

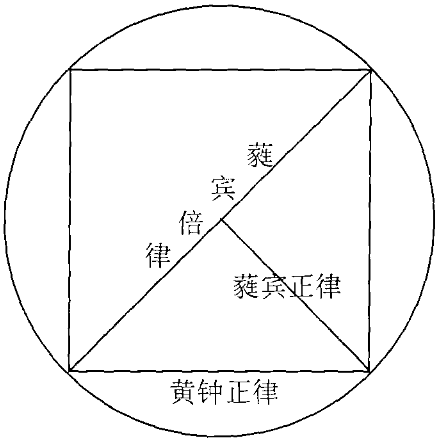


图 3　蕤宾倍律求解示意图

得到应钟倍律的长度，十二律黄钟为始，应钟为终，周而复始，循环不止。因此，以十二律各律长度数值乘以黄钟正律 10 寸，再除以应钟倍律长度 10.59 463……寸，就可以得到该律的下一律。以此计算可得十二平均律倍、正、半律弦长数值，如下表所示：

表 14　十二平均律倍、正、半律弦长数值比较

律名	倍律		正律		半律	
	音名	弦长	音名	弦长	音名	弦长
黄钟	C	2	c	1	c^1	0.5
大吕	$^{\#}C$	1.887 748	$^{\#}c$	0.943 874	$^{\#}c^1$	0.471 937
太簇	D	1.781 797	d	0.890 898	d^1	0.445 449
夹钟	$^{\#}D$	1.681 792	$^{\#}d$	0.840 896	$^{\#}d^1$	0.420 448
姑洗	E	1.587 401	e	0.793 700	e^1	0.396 850
仲吕	F	1.498 307	f	0.749 153	f^1	0.374 576
蕤宾	$^{\#}F$	1.414 213	$^{\#}f$	0.707 106	$^{\#}f^1$	0.353 553
林钟	G	1.334 839	g	0.667 419	g^1	0.333 709
夷则	$^{\#}G$	1.259 921	$^{\#}g$	0.629 960	$^{\#}g^1$	0.314 980
南吕	A	1.189 207	a	0.594 603	a^1	0.297 301
无射	$^{\#}A$	1.122 462	$^{\#}a$	0.561 231	$^{\#}a^1$	0.280 615
应钟	B	1.059 463	b	0.529 731	b^1	0.264 865
清黄	c	1	c^1	0.5	c^2	0.25

附注 14：弦长单位：尺

在《律吕精义·内篇》和《算学新说》中，除了介绍中项“蕤宾倍律”的算法外，还给出了其它中项的算法，为了更直观的看这些中项的算法，现将这写中项计算列表表示为：

表 15 《算学新说》中项算法表

n	《算学新说》	律吕	算法
第四句	“以黄钟正律乘蕤宾正律得平积……开平方所得，即夹钟正律。”	夹钟正律	$\sqrt{黄钟正律\times蕤宾正律}=\sqrt{1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}$
第五句	“以黄钟正律乘蕤宾倍律得平积……开平方得，即南吕倍律。”	南吕倍律	$\sqrt{黄钟正律\times蕤宾倍律}=\sqrt{1\times\sqrt{2}}$
第六句	“置夹钟正律以黄钟再乘，得立积……开立方所得，即大吕正律也。	大吕正律	$\sqrt[3]{夹钟正律\times黄钟正律\times黄钟正律}=\sqrt[3]{\sqrt{1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}\times1\times1}$
第七句	“置南吕倍律以黄钟再乘，得立积……开立方所得，即应钟倍律也。	应钟倍律	$\sqrt[3]{南吕倍律\times黄钟倍律\times黄钟倍律}=\sqrt[3]{\sqrt{1\times\sqrt{2}}\times1\times1}=2^{1/12}$

显然从《周礼》方圆图出发已经不能再推出这些公式了，那么，朱载堉又是怎样得到这些计算公式的呢？结合上表，继续分析、探索朱载堉的计算思路：以夹钟正律为例，由于夹钟正律是黄钟正律和蕤宾正律的比例中项，因此有：

黄钟正律：夹钟正律=夹钟正律：蕤宾正律

$$夹钟正律=\sqrt{黄钟正律\times蕤宾正律}$$

同理，可以得到黄钟正律和蕤宾倍律的比例中项南吕倍律：

$$南吕倍律=\sqrt{黄钟正律\times蕤宾倍律}$$

得出以上律吕中项以后，还要继续求出其它诸律，即四等比例数（已知一、四项，求解二、三项的问题）。例如由一、四项黄钟、夹钟，求解二、三项大吕、太簇的问题。按照等比例计算法则，二、三项计算可以转化为联立二元一次方程组求解及开立方的问题，以大吕律算法为例：

设黄钟为 H，大吕为 D，太簇为 T，夹钟为 J，联立方程组：

$$\begin{cases}\frac{H}{D}=\frac{D}{T}\\ \frac{D}{T}=\frac{T}{J}\end{cases}$$

解得，

$$D=\sqrt[3]{J\times H\times H}$$

据此方法可继续求解出应钟倍律。在当时数学发展水平下，这些运算已不成问题，朱载堉随后又按照上述计算方法依此给出蕤宾、夹钟、南吕、和应钟等各律吕的律长，并给出了具体算式。

根据《算学新说》中记述的各律算法以及《律吕精义·内篇》相关内容，反推朱载堉发明十二平均律的思路：从十二律分布需按照比例关系的思想出发，在《周礼·髞氏为量》方圆图的启发下，先从黄钟倍、正律关系以及方圆相函构造推算出蕤宾倍律；再从黄钟倍律、蕤宾倍律、黄钟正律推出对应的中项夹钟倍律、南吕倍律；最后再求出应钟倍律、大吕倍律等其余诸律律长。按照这种思路计算所得的十二平均律各律律长，它们之间的等比例关系及最小公倍数$\sqrt[12]{2}$是容易验算得出的。朱载堉计算十二平均律的主要是为了实现完全旋宫转调进而弥补纯律和三分损益律在这方面的局限性，这就可以解释为什么他在求出了十二平均律各律律长之后，并不是着意于从数学上对等比数列求解的具体问题作出更多的总结和证明，而是尽量寻求与前人理论相拟合之处，使“新法密率”能够皈依在诸律皆起于黄钟的传统观念。为此，朱载堉巧妙的借鉴了《周礼·髞氏为量》“内方尺而圆其外”的思想，首先给出蕤宾倍律$\sqrt{2}$的计算依据，再依次推导，最终完成了十二平均律的伟大创造[41]。

朱载堉在律学研究上坚持这样的辩证数理观：1）“度生于律”的物理史观；2）“音生于数”的数理律学方法论；3）数理律学与人的辩证思想。“度生于律”、“音生于数”体现了他对度、律、数之间关系的辩证认识；“夫数以理为本，而人心之灵有理数之本也，惟理有未穷，故其知有不尽。”①集中反映了他对人与数理律学之间关系的认识；他以“理”作为最高范畴，认为自然之理或规律才是万物的本源，而数也来源于理；人的思想则是认识和把握理数的根本，由于理是无穷尽的，因此人的思想认识发展也是没有尽头的。他认为律学计算的基础在于通过测音试验来度量弦线、律管的长短，是因为定律的需要才借助算术方法，而不是因为算术的需要去限定律、度，这种观点在现在看来都是完全合乎律学计算的物理声学本质[42]。

4.3 十二平均律的应用

朱载堉在世界上第一个求解了十二平均律各律“密率”。这与当时欧洲数学家在这方面的工作比较，无论在计算规模、效率、精度上，都遥遥领先，达到了令人惊异的地

① 《律吕精义·序》

步。十二平均律的数理调音体系是在精确定律法下实现的，这种定律法虽然是人为的，但是它的误差不会使习惯于该体系的耳朵感到不悦；而它的显著优点则在于它能够实现旋宫转调，特别是在琴键乐器中，可以根据需要任意使用所有的键。

在世界史上，没有哪一个民族像中华民族这样重视律学并把它视为国家兴亡的象征[13]。中国历代的正史更是将乐律作为其中的一篇。从西周的“大司乐”到明代的“太常寺”，都是在皇宫内设立的掌管乐律的机构。像律学这样一个小小的分支学科，竟然能在皇家集团中占据一席之位，这在世界其它民族史上是非常罕见的。可是在如此重视律学的王宫里，朱载堉创立“新法密率”之后，一直没能得到相应的重视，相反却被深埋在王宫殿堂之中。

20世纪上半叶，中国语言学家刘复（1891-1932年）撰写了一篇名为《十二等程律的发明者—朱载堉》的重要论文，他以现代科学的形式首次深刻的阐述了朱载堉的十二平均律理论。他对朱载堉的评价同时也引起了欧美学者的极大反响。从此以后，朱载堉的十二平均律理论逐渐的恢复了它在音乐史、科学史、和文化史上应有的地位。他说到：

“在中国的众多发明中，惟有明朝末年，朱载堉先生所发明的十二等程律，却是一个一做就做到登峰造极的大发明。他把一协分为十二个相等的半度，是个惟一无二的方法。直到现在，谁也不能推翻它；他所用的算法，直到现在还是照样的做；他算出来的数目字，直到现在还是直抄了用，不必我们自己费心”。“这种发明恐怕至少也可以比得上贝尔的电话和爱迪生的留声机”[41]。

与在中国所受“待遇”不同，十二平均律理论在西方被音乐理论家们热情的宣传并迅速得到了接受和应用。在西方，十二平均律于1691年由德国人魏克米斯特（Andreas Werckmeister,1645-1706年）提出后，得到巴赫（Johann Sebastian Bach, 1685-1750年）的极力倡导。他于十八世纪前期，集中前人对十二平均律所做出的理论研究以及研究成果，在创作上充分发挥十二平均律的效能，给后世以巨大的影响。巴赫分别在1722年和1744年发表的作品《平均律钢琴曲集》中，依次系统地用十二个大调和十二个小调，兼用单音音乐与复音音乐的调式，作成有名的“前奏曲”（Prelude）和“赋格曲”（Fugue），他用创作实践证明了这个律制的合理性；同时又利用“等音”的互换，把之前不用的$^{\#}C$大调与$^{\#}A$小调都变为有用，使转调的范围更加宽大，主音音乐也渐次进展（主音音乐的完成，是出于德国人贝多芬（Berthoven,1770-1827年）之手）[2]。十二平均律在巴赫那里借助键盘乐器迅速传播开来，打造出西方音乐艺术在巴洛克时期的盛世辉煌，它同时又大大促进了西方键盘乐器的发展，与键盘乐器的进化相得益彰[17]。

第五章 三种律制计算体系的比较

十二平均律的出现，充实了律制体系，与纯律和三分损益律共同构成了律学上三大律制体系。这三种律制的半音结构在前面的章节中已经表示，可以方便的辨认出三种律制的主要区别：十二平均律由同一种半音组成；三分损益律由大、小两种半音组成；纯律则由四种半音所组成。它们之间显然存在着差异但又彼此关联，对三种律制计算体系的详细比较将在这一章中展开进行。

5.1 三种律制的差异

三分损益律、纯律和十二平均律这三种律制之间明显地存在着差异；它们之间互相矛盾。要充分理解这三种律制之间的矛盾，进而解决这些矛盾，就要清楚地认识三种律制之间的差异是怎样具体表现在音阶和音程上的[45]。三大律制音程比较：

表 16 三大律制：十二平均律、三分损益律和纯律音程比较

次序	律名	音名	律调	平均律	三分损益律	纯律
1(1)	黄钟	C	基音	1	1	1
2(8)	大吕	$^{\#}C$	小二度	$2^{1/12}$	2187/2048	16/15
3(3)	太簇	D	大二度	$2^{2/12}$	9/8	9/8
4(10)	夹钟	$^{\#}D$	小三度	$2^{3/12}$	19683/16384	6/5
5(5)	姑洗	E	大三度	$2^{4/12}$	81/64	5/4
6(12)	仲吕	F	纯四度	$2^{5/12}$	177147/131072	4/3
7(7)	蕤宾	$^{\#}F$	增四度	$2^{6/12}$	729/512	45/32
8(2)	林钟	G	纯五度	$2^{7/12}$	3/2	3/2
9(9)	夷则	$^{\#}G$	小六度	$2^{8/12}$	6561/4096	8/5
10(4)	南吕	A	大六度	$2^{9/12}$	27/16	5/3
11(11)	无射	$^{\#}A$	小七度	$2^{10/12}$	59049/32768	9/5
12(6)	应钟	B	大七度	$2^{11/12}$	243/128	15/8
13(13)	清黄	c	八度	2/1	2/1	2/1

由上表从音程上看，平均律除了八度音程之外，没有与纯律相同的音程，而三分损益律却保留了纯律的大二度、纯四度和纯五度。这也就是说平均律除了八度之外，不存在客观自然的协和音律，八度内的每一个律音都不纯正，这样在音程上平均律就不如三分损益律表现的协和，这正是导致对平均律采取犹豫态度的主要原因；从调式上看，等比音阶只能分辨出大调和小调两种调式，在十二律中也就只能形成 24 个律调，调式的

减少，是音乐界对采用平均律态度犹豫的另一个原因。但是，转调在作乐上的出现，是为了发挥多姿多彩的调式变动，五声音阶的五个调式在十二律中可以形成 60 个律调，七声音阶的七个调式则可以形成 84 个律调，调式的多样性也一直受到音乐界的珍视。十二平均律自 16 世纪在中国出现以后，中国音乐界仍然以三分损益律为主，并没有采用平均律。与在中国的情形相似，平均律自 17 世纪在欧洲出现以后，也没有立即被采用。欧洲音乐界不仅没有放弃中音调律，而且追求在平均律中增强纯律协和音程。即使在欧洲极有创造性的古典音乐阶段，虽然经过巴赫的推荐和在音乐转调作用上做出了实际应用，平均律仍然拖延了半个多世纪后，在 19 世纪初才得到普遍采用。

5.2 三种律制的联系

三种律制之间的关系是错综复杂的。从律制上说，三分损益律和纯律到十二平均律，是由繁到简的过程。三分损益律和纯律，都是随着调的增加而不断的增加律数，而十二平均律则不然，他用十二个律应对一切的变化，是使律制简化的一种律。十二平均律一举解决了三分损益律和纯律本身存在的矛盾以及两种律制之间的矛盾，当然也就解决了这两种律一味增加律数而不能回到出发律的矛盾，也就是“返宫”的问题。但需要指出的是，十二平均律虽然突破了纯律对转调的约束性，并超越了三分损益律旋宫转调的功能，从听觉美感而言，也有其局限性。例如，它影响音程的和谐性，又使得音程的协和与不协和的范畴变的混淆不清等等[46]。

在前面章节对三种律制计算体系的探讨中，我们已经掌握了各个律制的计算过程以及音程结构等规律。本节将在前文的基础上，用现代数学方法揭示和比较三种律制构成的内部规律，对律制研究进行一种基于公式化的统一，并从物理声学的角度更深层次的解释形成不同律制计算体系之间差别与联系的规律。这种统一将建立在音程单位的统一，音高相对关系的统一，以及符号体系的统一之上。

（1）十二平均律公式表示：

$$l_n = \frac{l_1}{2} 2^{(13-n)/12}, n = 1,2,3,\ldots,13.$$

上式中，l_1为一弦最低共振音的长度，l_{13}为同弦八度音的长度。再由此式引入一个标准化的共振长度公式：

$$L_n = \frac{l_n}{l_1} = \frac{1}{2} 2^{(13-n)/12},$$

$$n = 1, L_1 = 1$$

$$n = 7, L_7 = \frac{1}{2} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.7071...,$$

$$n = 13, L_{13} = \frac{1}{2} = 0.5$$

L_1作为一个八度中的标准主音，L_{13}是八度音标准化的共振长度。在现代声学以及音乐理论中，习惯用频率来表示音高，它与振动体的长度成反比，定义为：

$$T_n = \frac{1}{L_n} = 2 \cdot 2^{(n-13)/12} = 2^{(n-1)/12}$$

$$T_1 = 1, T_7 = 2^{\frac{1}{2}} = 1.4142..., T_{13} = 2$$

T_1与T_{13}的比为 1：2，这与L_1和L_{13}的比例正好相反。以T_1=1 作标准，用现代音乐符号表示这十二个音的音高数值，列表如下所示：

表 17　十二平均律各音高值，T_n

次序	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}
律名	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟	清黄
音名	C	$^{\#}C$	D	$^{\#}D$	E	F	$^{\#}F$	G	$^{\#}G$	A	$^{\#}A$	B	c
数值	1	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{1}{6}}$	$2^{\frac{1}{4}}$	$2^{\frac{1}{3}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{1}{2}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{2}{3}}$	$2^{\frac{3}{4}}$	$2^{\frac{5}{6}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	2

（2）三分损益律计算公式：

三分损益律中，以S_n表示一个八度内的十三个音，它由两个相生因子构成：

$$p = \frac{3}{2}, q = \frac{3}{4}$$

若取主音S_1=1，按照三分损益相生规律由p,q依次相乘，得到一组音高数据：

1，p，pq，$(pq)p$，$(pq)^2$，$(pq)^2p$，$(pq)^3$，$(pq)^3q$，$(pq)^4$，$(pq)^4q$，$(pq)^5$，$(pq)^5q$，$(pq)^6$

这组数据按照先增后减的生律规律，如表 18 示为：

表 18　三分损益律各音高值算法，S_n

次序	律名	音名	算法	数值
S_1（1）	黄钟	C	1	1
S_2（8）	大吕	$^{\#}C$	$(pq)^3q$	2187/2048
S_3（3）	太簇	D	pq	9/8
S_4（10）	夹钟	$^{\#}D$	$(pq)^4q$	19683/16384
S_5（5）	姑洗	E	$(pq)^2$	81/64
S_6（12）	仲吕	F	$(pq)^5q$	177147/131072

表 18（续）

S_7（7）	蕤宾	$^{\#}F$	$(pq)^3$	729/512
S_8（2）	林钟	G	p	3/2
S_9（9）	夷则	$^{\#}G$	$(pq)^4$	6561/4096
S_{10}（4）	南吕	A	$(pq)p$	27/16
S_{11}（11）	无射	$^{\#}A$	$(pq)^5$	59049/32768
S_{12}（6）	应钟	B	$(pq)^5q$	243/128
S_{13}（13）	清黄	c	$(pq)^6$	531441/262144

从上表可以看出，由于p=3/2>1，所以从S_1到S_8是先增加；q=3/4<1，从S_8下降S_3，到S_7以后，次序相反，先减后增。同时，按照这种相生规律，到S_{13}后频率值不等于 2，这就是三分损益律计算不可返宫的缺陷，c实际上不是S_1的完全八度音，亦即不可“旋相为宫”[47]。

（3）统一化三分损益律计算程序：

为了使三分损益律与十二平均律之间建立起联系，现对三分损益律做统一化改良，设改良后的各律音高值为G_n：首先，确定八度音G_{13}：G_1=2/1，对p，q值做适当调整，用p'，q'替换，令：

$$(p' \cdot q')^6 = 2/1 \qquad (5.1)$$

为了保持 G 音的纯正，令 $p' = p = \frac{3}{2}$

代入(5.1)得，$q' = \frac{2}{3} 2^{\frac{1}{6}} = 0.7483...$

这个数值 q' 比原 q 值（0.75）略小，按照三分损益相生方法，替换原来的相生因子，依此求出各律音高数值与十二平均律数值比较如表 19 所示：

表 19　改良三分损益律各音音高数值G_n与T_n的比较

次序	1 (1)	2 (8)	3 (3)	4 (10)	5 (5)	6 (12)	7 (7)	8 (2)	9 (9)	10 (4)	11 (11)	12 (6)	13 (13)
律名	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟	清黄
音名	C	$^{\#}C$	D	$^{\#}D$	E	F	$^{\#}F$	G	$^{\#}G$	A	$^{\#}A$	B	c
生律法	律本	上生	上生	上生	上生	上生	上生	下生	下生	下生	下生	下生	下生
G_n	1	$\frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}$	$2^{\frac{1}{6}}$	$\frac{2}{3}2^{\frac{5}{6}}$	$2^{\frac{1}{3}}$	$\frac{4}{3}$	$2^{\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{2}$	$2^{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}2^{\frac{1}{6}}$	$2^{\frac{5}{6}}$	$\frac{2}{3}2^{\frac{1}{3}}$	2
T_n	1	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{1}{6}}$	$2^{\frac{1}{4}}$	$2^{\frac{1}{3}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{1}{2}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{2}{3}}$	$2^{\frac{3}{4}}$	$2^{\frac{5}{6}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	2

由上表数据可以看出，通过改良后的三分损益律与十二平均律相比，六律音高值完全相同，六吕与平均律中的对应的六吕差值亦不足二音分。

由 $G_3 = p' \cdot q' = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{6}}$ 不难看出改良后三分损益律吕交替与十二平均律同异的原因：选取准确的八度比值 2/1；由纯正 G 音限定了一个相生因子 3/2。

（4）纯律的计算

纯律音阶结构由三种音程构成：

M=大全音=9/8；m=小全音=10/9；s=大半音=16/15

在 C 大调中，纯律大音阶的计算方法为：

表 20　C 大调纯律大音阶计算公式

音名	C	D	E	F	G	A	B	c
大音阶公式	1	M	Mm	Mms	M^2ms	M^2m^2s	M^3m^2s	$M^3m^2s^2$
数值	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

纯律大音阶中所有音的数值都是简单分数，这就保证了音调的绝对纯正，其中F，G二音在G_n中与G_6，G_8二音相同。

表 21　四种律制T_n、S_n、G_n、C_n的比较[48]

次序	律名	音名	T_n	S_n	G_n	C_n
1(1)	黄钟	C	1	1	1	1
2(8)	大吕	$^{\#}C$	1.0595	1.0687	1.0582	
3(3)	太簇	D	1.1225	1.1250	1.1225	9/8=1.1250
4(10)	夹钟	$^{\#}D$	1.1892	1.2014	1.1879	
5(5)	姑洗	E	1.2599	1.2656	1.2599	5/4=1.250
6(12)	仲吕	F	1.3348	1.3515	1.3333	4/3=1.3333
7(7)	蕤宾	$^{\#}F$	1.4142	1.4238	1.4142	
8(2)	林钟	G	1.4983	1.5	1.5	3/2=1.5
9(9)	夷则	$^{\#}G$	1.5874	1.6018	1.5874	
10(4)	南吕	A	1.6818	1.6875	1.6837	5/3=1.6667
11(11)	无射	$^{\#}A$	1.7818	1.8020	1.7818	
12(6)	应钟	B	1.8877	1.8984	1.8899	15/8=1.8750
13(13)	清黄	c	2	2.0273	2	2

附注 1：T_n：十二平均律；S_n：三分损益律；G_n：改良三分损益律；C_n：纯律

经过改良后的三分损益律G_n同十二平均律T_n取得了联系，同时又介于十二平均律与纯律之间，它保存了平均律中的六个音程，其它六个律不仅与平均律相差甚微，还在C大调中有两个音与纯律相同[49]。

从音程数据上看，三分损益律、纯律十二平均律之间的比较关系被改良三分损益律调和，平均律是一种中庸的折衷律制，它把大半音（16/15）和小半音（256/243）折衷了，造成“折衷的”平均律半音；又把大全音（9/8）和小全音（10/9）折衷了，造成“折衷的”平均律全音。平均律仿佛意把五度相生律和纯律加以调和又折衷，使自己介于两者之间，但又稍接近于五度相生律[50]。

从实质上来看，十二平均律是将五度相生律和纯律上错综复杂的升降音纳入平均律半音体系，这样就使平均律有可能解决五度相生律和纯律本身以及之间的几种矛盾，这是平均律的最大优点，但同时也带来了缺点，如平均律在构成和弦时存在和谐性问题。由于三种律制自身的不完美性，也促使它们可以同时并用，从而达到乐曲演奏上的完整性。十二平均律在音乐中得到了施展和发挥，并非取代纯律和三分损益律，而是进一步充实了律制体系，增加了音乐创作发挥的载体，为音乐家在和声上提供了新的自由。

历史证明，音阶结构在一直的变化着，律制的兴起和淘汰，随着时代在变化。近代电子声学的发展，音律与和声在概念和实践上都做出了重要的革新，电子乐器可以连续不断地变迁音律，音程也不在限于半音程的量子化[16]。毫无疑问，音阶继续在变化着，律制体系也在逐步的扩增。然而，十二平均律和纯律、三分损益律毕竟仍然占据律制体系的主导地位，共同承担着音乐演奏的主要律制体系[51]。

结论

三分损益律、五度相生律、纯律和十二平均律，在不同时期的音乐大舞台上都扮演过重要角色。本文系统地比较了几大律制的计算体系，通过对各律制的音程计算关系的比较研究，得出以下结论：

五度相生律或三分损益律，具有单一的生律机制，各音之间有紧密的联系，音程关系既有多样性，丰富多彩，重复性又好，比较简单。适合于以旋律结构为主的单音体音乐，其特点是旋律优美，进行欢快，变化复杂。但由于其大、小三度和大、小六度的频率比不能表示为简单的分数比，导致乐音协和性差，不适合用于以和声结构占重要地位的复音体音乐。

纯律主要音程的频率比常表示为简单分数比，其乐音协和性较好，适合复音体音乐。其特点是音质丰厚，优雅恬静，有余音绕梁的感觉。但由于纯律有纯五度和纯律大三度两种生律音程，导致其音程关系较三分损益律更为复杂，音程结构复杂而不稳定。

十二平均律生律机制单一，有利于旋律的展开，其大、小三度和大、小六度的协和性又比五度相生律好，而且它不会在转调时产生新的音律，实现了旋宫转调。

律学计算体系的比较研究采用各科综合方法，解决一类与数学相关的音乐系统问题。在各个学科以新的水平加速走向渗透、相互综合形成新科学体系的今天，律学计算体系的建立，构成了律制系统工程的一部分；比较律学计算体系，无疑有助于我们探索规律和源流，深入揭示律学研究的伟大成就；重新认识和研究了古代律学理论所留下的律学数学方法遗产，对后人研究做出甄别整理，无论对律制方法论本身的认识或探索，还是律学学科的系统发展都具有实际意义及重要价值。但是我们还必须认识到，由于古代律学理论与律学实验高度结合的特殊性以及不同律制之间的统一性，使得这门学科还有许多重大的理论问题有待我们做出更深入的研究。

参考文献

[1]戴念祖. 中国物理学史大系声学史[M]. 长沙:湖南教育出版社，2001：188-221

[2]吴南薰. 律学会通[M]. 北京：科学出版社，1964：66

[3]唐魏征等. 隋书卷十六志十一[M]. 上海：中华书局，1976：

[4]编者.尚书[M]. 郑玄注.上海：商务印刷馆，1937：

[5]人民音乐出版社编辑部编. 《乐记》论辩[M]. 北京：人民音乐出版社，1983：

[6]蒋孔阳.先秦音乐美学思想论稿[M].北京：人民音乐出版社，1986：

[7]郭沫若. 青铜时代[M]. 上海：新文艺出版社，1951：

[8]李学勤. 新出青铜器研究[M]. 北京：文物出版社，1990：23

[9]中国音乐文物大系总编辑部. 中国音乐文物大系[M]. 郑州：大象出版社，1999：

[10]李文林. 数学史概论[M]. 第二版. 北京：高等教育出版社，2002：135-137

[11]Aristotle.Metaphysica[M]. 吴寿彭译. 北京：商务印刷馆，1996：14-15

[12]金红莲. 毕达哥拉斯与其音乐论[J].科教文汇(中旬刊)，2009，269，285

[13]徐传胜. 辛沂. 理智的音乐与感觉的数学[J]. 数学通讯，2003，18：48-49

[14]杨荫浏. 三律考[J]. 音乐研究，1982，2:30-39

[15]缪天瑞. 律学[M]. 北京：人民音乐出版社，1996：

[16]程贞一. 曾侯乙编钟在声学史中的意义[M]. 武汉：湖北人民出版社，1992：304-341

[17]曲安京．中国数理天文学[M]．北京：科学出版社，2008：23

[18]戴念祖. 中国物理学史大系声学史[M]. 长沙：湖南教育出版社，2001：188-221

[19]诸子集成. 淮南子・天文训・卷三[M]. 上海：上海书店影印出版，1986

[20]Chen Cheng-Yih.Acoustics in Ancient And The Sixteenth Century China[M]. Hong Kong: Hong Kong University press,1996:113-120

[21]丘琼荪校释. 《历代乐律志校释》(第一分册《史记・律书》) [M]. 北京：人民音乐出版社，1999

[22]戴俊超. 三分损益律与数学计算[J]. 中国音乐（季刊），2009（1）：81-84

[23]吴文俊主编. 世界著名数学家传记[M]. 北京：科学出版社，1995：13

[24]Wilie．R. Musik und Mathematik[M]．Cambridge:Harvard Univ．Press,1958：294

[25]李迪（主编）．中外数学史教程[M]．福建：福建教育出版社，1993：169-174

[26]李文林．数学的进化—东西方数学史比较研究[M]．北京：科学出版社，2005：42

[27]Winnington-Ingram.R.P.Mode in Ancient Greek Music[M]. Amsterdam: Adolf M.Hakkert,1968

[28]戴念祖. 中国、希腊和巴比伦：古代东西方的乐律传播问题[J]. 中国音乐学（季刊），1993，24(3)：5-16

[29]崔宪. 钟律与琴律[J]. 中央音乐学院学报，1995（1）：86-93

[30]王光祈. 中国音乐史[M]. 香港：香港太平书局版，1960

[31]陈其翔，陆志华. 用分数逼近法研究三分损益律[J]. 音乐艺术，1997，3（2）：23

[32]陈应时. 王朴律究竟是一种什么律[J]. 交响，2001（2）：19-24

[33]徐飞. 朱载堉十二平均律算法考[J]. 科学技术与辩证法，1994，11(5)：35-39

[34]F. A. Kuttner. Prince Chu Tsai-Yu's Life and Work[J]. Ethnomusicology, 1975, Vol. XIX, No. 2：168-169

[35]戴念祖. 朱载堉一明代的科学和艺术巨星[M]. 北京：人民出版社，1986：203

[36]Joseph Needham. Science and Civilisation in China[M]. Cambrige University Press,1962：228 Vol. IV, Part1

[37]戴念祖. 天潢真人—朱载堉[M]. 郑州：大象出版社，2008：45

[38]黄国璽. 朱载堉十二平均律理论创建中的律学数学方法[J]. 音乐探索，1986：19-23

[39]李继闵. 算法的源流[M]. 北京：科学出版社，2007：75-92

[40]李纯一. 中国古代音乐史稿[M]. 北京：人民音乐出版社，1981

[41]刘再生. 中国古代音乐史简述[M]. 北京：人民音乐出版社，1989：459

[42]Chen Cheng-Yih. History of Mathematics in Chinese Civilization[M]. San Diego:University of California press,1980

[43]王子初. 中国音乐考古学[M]. 福建：福建教育出版社，2004：45-76

[44]刘复. 十二等律的发明者朱载堉[A]. 国立中央研究院历史语言研究所集刊外编. 庆祝蔡元培先生六十五岁论文集[C]. 北平，1933：279-310

[45]李爱真，刘振. 用数学的观点论述研究律学的三种途径[J]. 艺术教育，2005(4)：72-73

[46]黄翔鹏. 传统是一条河流[C]. 北京：人民音乐出版社，1996

[47]谷杰. 音律计算法比较及三种律制音阶音分值的简易算法[J]. 黄钟（中国·武汉音乐学院学报），2009，08(3)：103-110

[48]戴振铎. 广义三分损益律与朱载堉十二平均律及纯律的关系[J]. 中国音乐学（季刊），2000(4)：105-114

[49]Chen Cheng-Yih. Early Chinese Work in Natural Science[M]. Hong Kong: Hong Kong University press,1996：78-79

[50]Apel. Willi. Daniel.Ralph T. The Harvard brief dictionary of music[M]. New York:Pocket books,1961

[51]杨荫浏. 杨荫浏音乐论文选集[M]. 上海：上海音乐出版社，1986：132-135

攻读硕士学位期间取得的学术成果

[1]刘娅娅. 古代中国与希腊乐律计算起源比较研究[J]. 西北大学学报，2011（3）.

[2]LiuYaya. The combination of Mathematics and Music-The comparative Study of the Origin of the Calculation of pitch in Ancient China and Greece[A]. 12th. ICHSC. Proceedings of the 12th International Conference on the History of Science in China[C]. 北京：清华大学出版社，2011.

[3]赵晔，王昌，刘娅娅. 幂等左侧余 Quantale 的特征[J]. 纯粹数学与应用数学，2011（3）.

致谢

逝者如斯，回忆在西北大学数学系学习的这三年，忙碌而快乐。不知觉间，我们从初入数学史之门的彷徨学子蜕化地坚定执着。三年点滴中，对数学这门学科有了全新而深刻的认识，它的独特魅力总是鼓舞人心！

学业既已到了尾声，此刻最想说的是感谢，最难抑的是感恩，没有你们，我不会在这里，没有你们，我不会脚步坚实。

感谢我的导师曲安京教授，是您的支持和鼓励让我一次次的找寻自己，抓紧时间，克服困难，勇往直前。

感谢王大明教授，您时刻关心我督促我，指引我踏上求学之路。

感谢姚远教授，您像慈父一般疼爱每一个学生，感谢您对我的指导和帮助。

感谢中心的袁敏，赵继伟，唐泉，潘丽云，杨宝珊老师，感谢答辩组的全体老师！

感谢滕艳辉师兄在论文排版制表中的热情帮助，感谢 Doria Lee 对论文英文翻译部分的耐心指导，感谢中心全体同学对我的关怀和帮助！

感谢我的家人一直以来对我的支持和爱护！

前方路，艰辛漫长，我要再接再厉，勇敢坚定向前迈步！

刘娅娅于西北大学

2011.06